4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M\colon x \leq s$,
- $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s\, \exists x \in M\colon x > s'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Poznámka 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej $\sup M$.

Definice 3. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Věta 4. Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in R$ a mějme $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak tak é $\lim_{k\to\infty} = A$.

Věta 5. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje *Bolzano–Cauchyho podmínku*:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}\ m, n \geq n_0 :\ |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Příklady

1. (a) Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N}$$

$$(0;2]$$

$$(0;1)\cap\mathbb{Q}$$

$$\{x\in\mathbb{Z}; x\geq -\sqrt{6}\}$$

$$\{(-1)^n\sqrt{n}; n\in\mathbb{N}\}$$

$$\{\arctan x; x\in\mathbb{R}\}$$

   (b) Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

2. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior

   (a)
$$\lim_{n\to\infty}\sin(n\frac{\pi}{4})$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

   (c)
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

   (d)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$$

   (e)
$$\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$$

   (f)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}$$

   (g)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2}$$

3. Pro jaké posloupnosti (a_n) existuje $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$?