3.cvičení - výsledky a návody

October 18, 2009

Připomenutí teorie:

Definice 1. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A \; \forall y_1, y_2 \in B \colon ([x, y_1] \in F \;\&\; [x, y_2] \in F \implies y_1 = y_2).$$

Množinu

$$\{x \in A; \exists y \in B \colon [x, y] \in F\}$$

nazýváme *Definitioničním oborem* zobrazení (funkce) F a značíme $D(F)$ (nebo $\mathrm{Dom}(F)$). Množinu

$$\{y \in B; \exists x \in A \colon [x, y] \in F\}$$

nazýváme *oborem hodnot* a značíme $H(F)$ (nebo $\mathrm{Rng}(F)$).

Definice 2. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu
  $$f(M) := \{y \in B; \; \exists \, x \in M : \; f(x) = y\}$$
  nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.
- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu
  $$f^{-1}(P) := \{x \in A; \; f(x) \in P\}$$
  nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Definice 3. Nechť A a B jsou dvě množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže
$$\forall x, y \in A \colon [f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y].$$

(2) Řekneme, že f je *na* (*surjektivní*), jestliže
$$\forall y \in B \; \exists \, x \in A \colon f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a na.

Příklady

1. Dokažte následující tvrzení:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

   a *de Morganovy vzorce*

$$C \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$$

$$C \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$$

   Řešení: Rovnost dokazujeme dvěma inkluzemi.

   (a) "$\subseteq$"
   Nechť $x \in A \setminus (A \setminus B)$, pak platí: $(x \in A) \wedge (x \notin (A \setminus B))$, což můžeme rozepsat jako: $(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in A')$.
   Ale jelikož x nemůže ležet zároveň v A a v jeho doplňku, tak nám zbývá, že $x \in A \wedge x \in B$. Což je totéž, jakože $x \in A \cap B$.
   "$\subseteq$"
   Nechť $x \in A \cap B$, což je totéž, jakože $x \in A \wedge x \in B$. Jelikož x leží v B, tak nemůže ležet v $A \setminus B$.
   Takže máme, že $x \in A \wedge x \notin A \setminus B$. Což můžeme zapsat, jakože $x \in A \setminus (A \setminus B)$

   (b) Tento příklad jsme si ukazovali na cvičení

   (c) Dokážeme indukcí

      i. pro $n = 1$ zjevně platí

$$C \setminus A_1 = C \setminus A_1.$$

      ii. pro $n = 2$ máme

$$C \setminus (A_1 \cap A_2) = (C \setminus A_1) \cup (C \setminus A_2)\,,$$

      že to platí, lehce ověříme z obrázku nebo podobným způsobem, jako v prvním příkladě

      iii. nyní budeme předpokládat, že rovnost platí pro $n = k$, neboli

$$C \setminus \bigcap_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} (C \setminus A_i)$$

a budeme chtít dokázat, že platí i pro $n = k+1$. Rozepíšeme si levou stranu:

$$C \setminus \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = C \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1} \right).$$

Provedeme substituci a použijeme předpoklad pro $n = 2$, kde za A_1 vezmeme $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right)$ a za A_2 vezmeme A_{k+1}. Získáme

$$= C \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1} \right) = \left(C \setminus \bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \cup (C \setminus A_{k+1}).$$

Použijeme indukční přepoklad a jsme hotovi.

$$\left(C \setminus \bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) \cup (C \setminus A_{k+1}) = \bigcup_{i=1}^{k} (C \setminus A_i) \cup (C \setminus A_{k+1}) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (C \setminus A_i).$$

2. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť $A, B \subseteq M$, $C, D \subseteq N$. Dokažte následující tvrzení:

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

Řešení: chceme ukázat, že jestliže $y \in f(A)$, pak také $y \in f(B)$, za předpokladu $A \subseteq B$.

Volme tedy $y \in f(A)$, což znamená, že y je v obrazu množiny A, tedy má nějaký vzor $x \in A$, že $f(x) = y$. Neboť $x \in A$, která je podmnožinou B, pak také $x \in B$. V tom případě ale platí, že $f(x) \in f(B)$. Nyní si stačí uvědomit, že $f(x) = y$ a jsme hotovi.

Ukažte, že neplatí:

$$C \nsubseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \nsubseteq f^{-1}(D)$$

Řešení: připomeneme si negaci výroků, konkrétně implikace a budeme hledat vhodný protipříklad, který splňuje:

$$C \nsubseteq D \wedge f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D).$$

Volme kupříkladu funkci f jako konstantní funkci na $\mathbb{R}$: $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ a množiny $C = \{1\}$ a $D = \{2\}$. Určíme vzory těchto množin: $f^{-1}(C) = \emptyset$ a $f^{-1}(D) = \mathbb{R}$. Ale jelikož je prázdná množina obsažena v každé množině, tak platí, že

$$f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D).$$

Řekněte, kdy platí:

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

Řešení: funkce musí být prostá. Kdyby nebyla, pak bychom v jejím obrazu mohli najít bod, který má ještě jeden vzor někde mimo naši množinu A. Promyslete si, že předpoklad být bijekcí je zbytečně silný.

Řekněte, kdy platí:

$$f\left(f^{-1}(B)\right) = B$$

Řešení: funkce musí být na. Kdyby nebyla, tak pro část množiny B nenajdeme vzor, který nám pak bude chybět. Opět si promyslete, že nemusí být bijekcí.

3. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť A_i, $i = 1, \dots, n$ jsou podmnožiny množiny M. Potom:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$$

Řešení: opět indukcí.

(a) $n = 1$, zjěvně $f(A_1) = f(A_1)$

(b) $n = 2$, chceme dokázat, že $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. Toto dokážeme opět pomocí dvou inkluzí.

Nechť tedy $y \in f(A_1 \cup A_2)$, tedy $\exists x \in (A_1 \cup A_2)$ takové, že $f(x) = y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in A_1$. Tedy $y = f(x) \in f(A_1) \subseteq (f(A_1) \cup f(A_2))$.

Opačná inkluze: nechť $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. BÚNO $y \in f(A_2)$, z předchozích příkladů (2.)víme, že $f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$, čili tvrzení platí.

(c) předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, tedy

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f(A_i)$$

(d) pro $n = k + 1$ si rozepišme levou stranu rovnice

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right).$$

Použijeme předpoklad pro $n = 2$ a užijeme podobnou substituci, jako v prvém případě. Následně použijeme indukční předpoklad pro $n = k$:

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup f(A_{k+1}) = \bigcup_{i=1}^{k+1} f(A_i)$$

Jsme hotovi.

Dokažte, že:

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$$

Řešení jsme si ukazovali na cvičení, rovnost platí tehdy, když je funkce prostá. Nejprve najděte příklad, že rovnost opravdu nemusí nastávat. Abychom dokázali rovnost, tak nám chybí inkluze "$\supseteq$". V průběhu jejího důkazu nám vyplyne nutnost prostoty funkce.

Nechť tedy $y \in f(A_1 \setminus A_2)$, to znamená, že $\exists x \in A_1 \setminus A_2$, že $y = f(x)$. Použitím příkladu 2. získáme, že navíc $y \in f(A_1)$. Takže nám zbývá už jen, že $y \notin f(A_2)$.

Speciální volbou množin A_1 a A_2 získáme požadavek prostoty funkce. Volme tedy $A_1 = \{x\}$, právě to x, že $f(x) = y$. A_2 volme jako $A_2 = M \setminus x$. Jelikož výraz musí platit pro každé libovolné množiny A_1 a A_2, můžeme si je zvolit i takto. A nyní aplikujme požadavek, že $y \notin f(A_2)$, což jinými slovy znamená, že žádný jiný bod, než bod x, se nesmí zobrazit na y. Protože to musí platit pro všechna y a jim nalezená x, tak je to jinak řečený požadavek, že funkce f musí být prostá, neboť žádné y nesmí mít více, než jeden vzor. Těmito úvahami se zjistí, že funkce musí být prostá. Že je to nutná podmínka. Že je to podmínka postačující, snadno zjistíte sami (přepokládejte, že funkce je prostá a pokuste se dokázat tu druhou inkluzi, než je v zadání) .

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$$

Kdy platí rovnosti?

Řešení: mějme $y \in f\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$. Pak $\exists x \in A_i$ takové, že $f(x) = y$ a to pro $\forall i = 1, \ldots, n$. (Povšimněme si kvantifikátorů, to nalezené x je pouze jedno, zato se nachází ve všech A_i.)

Tedy $y \in f(A_i)$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Čili $y \in \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$.

Proč neplatí rovnost? Jako příklad si vezměme funkci, která všem kladným číslům přiřadí jedničku a nule přiřadí nulu. Jako množiny zvolme $A_i := \{0\} \cup (m-1; m)$, kde $m = 1, \ldots, 10$. Průnikem těchto množin je pouze nula: $\bigcap_{i=1}^{10} A_i = \{0\}$, takže $f(\bigcap_{i=1}^{10} A_i) = \{0\}$.

Ale $f(A_i) = \{0, 1\}$, takže $\bigcap_{i=1}^{10} f(A_i) = \{0, 1\} \neq \{0\}$.

Zbývá vyřešit otázku, kdy platí i opačná inkluze. Mějme $y \in \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$, tedy $\forall A_i$ $\exists x_i$ takové, že $f(x_i) = y$. My bychom navíc chtěli, aby $y \in f(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$. To znamená, že ta nalezená x_i musí být všechna stejná (to neznamená, že je to x_i jen jedno v každé množině, ale co kdyby náhodou, co kdyby ta množina obsahovala právě jen to x_i), vezmeme-li si právě popsaný případ, že množiny mají jen jeden bod, tak zjistíme, že kdyby x_i nebyla stejná, tak y nikdy nebude ležet v průniku A_i. Ale to znamená, že y má jen jeden vzor. Takže funkce musí být prostá. Jsme hotovi.

4. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť B_1, B_2 a B jsou podmnožiny množiny N. Dokažte následující tvrzení:

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

   Řešení: Nechť $x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$, pak $\exists y \in B_1 \setminus B_2$ takové, že $f(x) = y$. Tedy $x \in f^{-1}(B_1)$. Dále $x \notin f^{-1}(B_2)$, kdyby ano, tak $\exists z \in B_2$ takové, že $f(x) = z$. Ale jelikož jsou $B_1 \setminus B_2$ a B_2 disjunktní, tak by x mělo dva různé obrazy, což je spor s definicí zobrazení.

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(M))$$

   Řešení: je vidět. $f(M)$ je množina všech možných obrazů množiny M, a pouze tato množina má vzory, takže libovolný bod množiny B, který je mimo $f(M)$ nemůže mít vzor.

5. Dokažte o skládání funkcí:

   (a) je-li f rostoucí a g klesající, pak $f \circ g$ je klesající
   Řešení: je-li $x < y$, pak $g(x) > g(y)$ (z definice klesající fce). Je-li $u < v$, pak je $f(u) < f(v)$ (f je rostoucí fce). Provedeme substituci $u := g(x)$ a $v := g(y)$ a jsme hotovi.

   (b) je-li f omezená a g libovolná, pak $f \circ g$ je omezená
   Řešení: $|f(x)| \leq M \ \forall x$ a pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Takže ať už g zobrazí svůj definiční obor kamkoli, tak f zařídí, že výsledek bude omezený.

   (c) je-li f lichá a g sudá, pak $f \circ g$ je sudá
   Řešení: $g(x) = g(-x)$ (neb g je sudá), takže funkce f obdrží už dvě stejná čísla: $f(g(x)) = f(g(-x))$.

   (d) skládání funkcí je asociativní, ale není komutativní
   Řešení: asociativita se dokáže tak, že se to rozepíše. Že to není komutativní: protipříkladem jsou třeba funkce $f(y) = y^2$ a $g(z) = 2z$. Pak $f(g(x)) = 4x^2$, ale $g(f(x)) = 2x^2$.

6. Zkonstruujte bijekci z množiny přirozených čísel na množinu celých čísel a bijekci z množiny celých čísel na množinu racionálních čísel. Tedy ukažte, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ mají stejnou mohutnost.

   Řešení: dovolím si vás odkázat na Wikipedii: http://cs.wikipedia.org/wiki/Mohutnost, hledáte kapitolu Hilbertův hotel. Tam zjistíte, jak přirozená čísla natáhnout na dvojnásobek přirozených čísel. A tak nějak asi i tušíte, že celých čísel, ja dvakrát víc, než přirozných (a nula jako bonus k tomu). A to už je vše, co potřebujete. Seřadit celá čísla do posloupnosti už jistě nebude těžké. Netřeba dělat předpis, postačí obrázek.

7. Dokažte (sporem), že neexistuje prosté zobrazení z množiny přirozených čísel na množinu reálných čísel, neboli že $\mathbb{R}$ má větší mohutnost než $\mathbb{N}$.

   Řešení: stačí ukázat, že je nespočetný interval $(0, 1)$, neboť ten je obsažen v $\mathbb{R}$. To najdete tady: http://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_diagonální_metoda.

8. Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \quad \inf = 1 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$(0;2] \quad \inf = 0 \quad \sup = 2$$

$$(0;1) \cap \mathbb{Q} \quad \inf = 0 \quad \sup = 1$$

$$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\} \quad \inf = -2 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\} \quad \inf \text{neexistuje} \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\} \quad \inf = -\pi/2 \quad \sup = \pi/2$$

9. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte i příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.