3.cvičení

15.10.2009

1. Dokažte následující tvrzení:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

a *de Morganovy vzorce*

$$C \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$$

$$C \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$$

2. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť $A, B \subseteq M$, $C, D \subseteq N$. Dokažte následující tvrzení:

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

Ukažte, že neplatí:

$$C \nsubseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \nsubseteq f^{-1}(D)$$

Řekněte, kdy platí:

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

$$f(f^{-1}(B)) = B$$

3. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť A_i, $i = 1, \ldots, n$ jsou podmnožiny množiny N. Potom:

$$f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$$

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$$

$$f(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f(A_i)$$

Kdy platí rovnosti?

4. Nechť f je zobrazení množiny M do množiny N a nechť B_1, B_2 a B jsou podmnožiny množiny N. Dokažte následující tvrzení:

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(M))$$

5. Dokažte o skládání funkcí:

   (a) je-li f rostoucí a g klesající, pak $f \circ g$ je klesající

   (b) je-li f omezená a g libovolná, pak $f \circ g$ je omezená

   (c) je-li f lichá a g sudá, pak $f \circ g$ je sudá

   (d) skládání funkcí je asociativní, ale není komutativní

6. Zkonstruujte bijekci z množiny přirozených čísel na množinu celých čísel a bijekci z množiny celých čísel na množinu racionálních čísel. Tedy ukažte, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ mají stejnou mohutnost.

7. Dokažte (sporem), že neexistuje prosté zobrazení z množiny přirozených čísel na množinu reálných čísel, neboli že $\mathbb{R}$ má větší mohutnost než $\mathbb{N}$.

8. Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N}$$

$$(0; 2]$$

$$(0; 1) \cap \mathbb{Q}$$

$$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\}$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$$

9. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte i příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.