

Zápočtová úloha č. 1

Řešte následující okrajovou úlohu metodou střelby:

$$\begin{aligned}u'' &= f \text{ na intervalu } (a, b), \\u(a) &= A, u(b) = B,\end{aligned}\tag{1}$$

kde a, b, A, B a f si zadejte tak, aby byl výsledek zajímavý (např. $f(x) = \sin(x) - x \cos(2x)$, $a = 0, b = 5, A = 0, B = 1$ apod.)

Metoda střelby: Dělení (a, b) s krokem h a uzly x_i . Aproximuji $u(x_i) \approx u_i$. Rovnici přepíšu jako soustavu ODR prvního řádu:

$$\begin{aligned}u' &= v, \\v' &= f,\end{aligned}\tag{2}$$

kterou umím snadno řešit např. dopřednou (explicitní) Eulerovou metodou (aproximuji derivaci dopřednou diferencí):

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + hv_i, \\v_{i+1} &= v_i + hf(x_i).\end{aligned}\tag{3}$$

Z levé okrajové podmínky vím, že $u_0 = A$, ale neznám okrajovou podmínku pro $v_0 \approx u'(a)$, mám zadáno jen $u_n = u(b) = B$. Tedy si zkusím 'tipnout':

- Zkusím např. $v_0 = -100$, vyřeším pomocí (3) a (pravděpodobně) získám řešení, kdy bude $u_n < B$.
- Zkusím např. $v_0 = 100$, tentokrát asi bude pro změnu $u_n > B$.
- Metodou půlení intervalu najdu takové v_0 , pro které bude výsledné řešení splňovat $u_n = B$ s nějakou rozumnou tolerancí, např. 10^{-6} .

Naprogramujte a srovnejte výsledek s přesným řešením úlohy.