1

① Df, f' a obor, kde Váš výpočet pro f' platí.

$Df: \; 1-e^{-x^2} \geq 0 \iff e^{-x^2} \leq 1$ ✓ $\forall x$: $(-x^2 \leq \ln 1 \iff -x^2 \leq 0 \;\; \forall x)$

$D\operatorname{arctan} = \mathbb{R}$!

$D\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x \neq -1) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\forall y > 0 : (\sqrt{y})' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$

Celkem $Df = \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-e^{-x^2}}\right)' \operatorname{arctan}\frac{x}{x+1} + \sqrt{1-e^{-x^2}}\left(\operatorname{arctan}\frac{x}{x+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-x^2})^{-\frac{1}{2}}(-1)\cdot e^{-x^2}(-2x) \operatorname{arctan}\frac{x}{x+1} +$$

$$+ \sqrt{1-e^{-x^2}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \operatorname{arctan}\frac{x}{x+1} +$$

$$+ \sqrt{1-e^{-x^2}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \frac{1\cdot(x+1) - 1\cdot x}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \operatorname{arctan}\frac{x}{x+1}}}$$

$$\underline{\underline{+ \frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x^2+2x+2}}} .$$

Výpočet platí $\forall x \in Df$ kromě pro ta, kde nejsme schopni použít $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$, tj. $x \leq 0$. Jinak řečeno y musí být >0.

$(1-e^{-x^2}) > 0 \iff 1 > e^{-x^2} \iff 0 > -x^2 \iff x \neq 0$.

Platí na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. $\square$

$\boxed{\text{BONUS}}$: Vzorec pro f' není možné použít v 0. Tj. z definice

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-e^{-h^2}} \operatorname{arctan}\frac{h}{h+1}}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}!\right)}{=}$$

a)

$$= \lim_{h\to 0^-} -\frac{\sqrt{1-e^{-h^2}}}{\underbrace{-h}_{>0}} \operatorname{arctan}\frac{h}{h+1} = \lim_{h\to 0^-} -\sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{(-h)^2}} \operatorname{arctan}\frac{h}{h+1} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2}-1}{-h^2}} \operatorname{arctan}\frac{h}{h+1} \overset{\text{VOS+VOAL NAPŘ}}{=} \lim_{y\to 0} -\sqrt{\frac{e^y-1}{y}} \lim_{h\to 0^-} \operatorname{arctan}\frac{h}{h+1}$$

$y = -h^2$

$= -\sqrt{1}\cdot 0 = 0$. Podobně pro b) proveďte si (tj. $h \to 0^+$).

Obojí 0. $f'(0) = 0$.

Pozn.: Zkuste nějaký online graph-plotter pro vykreslení f' a f!
Nebo vyčkejte na průběhy, 2 týdny.

(2) Určete prim fci $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x}$ (použijte $y = \operatorname{tg} x$).

$$\left[\begin{array}{l} y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{(*)},\ dx = \frac{1}{1+y^2}\,dy \\ \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2},\ \sin x\cos x = \frac{y}{1+y^2} \\ \text{2. VOS} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{y^2}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2}{1+y^2}}\,\frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{y^2+2y+2}\,dy =$$

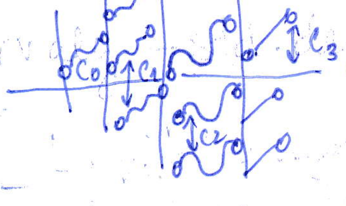
(*) udání def. int. subst. jsou snadné body, byť asi ne moc.

$=$ | koř. $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$! Zbytečné $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{\alpha}}$, nebát' pak musím sečíst → a upravovat na čtverec ⇒ rovnou na čtverec (dle postupu) | $=$

$$= \int \frac{1}{(y+1)^2 - 1 + 2}\,dy = \int \frac{1}{(y+1)^2+1}\,dy = \left| \begin{array}{l} z = y+1 \\ \text{1/2 VOS} \end{array}\right| = \int \frac{dz}{z^2+1} =$$

$$= \arctan z + C = \arctan(y+1) + C = \underline{\underline{\arctan(\tan x + 1) + C_k}}$$

neb si uvědomím, že prim fce, jež jsou def. na intervalu, tj. $\forall k$ na $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ zvlášť, tj. C_k v principu závisí na I_k.



Pozn.: 1. Napsání definič. int. k subst. je zadarmo.
2. To pak umožní napsat i intervaly, kde jste našli řešení.
3. Lepení je těžší.