Reprezentace asociativních algeber, Schurova dualita, Youngovy diagramy.

Svatopluk Krýsl a kol.

Tyto poznámky vznikly ze zápisků z přednášek konaných na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze během ZS 2004/2005. Kolektiv autorů, kterým tímto děkuji, tvořili Pavel Franc, Peter Franek, Zuzana Kasarová, Libor Křižka, Petr Luft, Martin Sikora a Ladislav Šišma. Text je prozatimní a mohou se v něm vyskytnout chyby.

1 Úvod

Poznámka: Některé pasáže úvodu doporučuji číst až po přečtení samotného textu - ukazuje totiž souvislosti a smysl jednotlivých partií.

Hlavním cílem, který je zpracován v tomto textu, je explicitní popis konečně dimenzionálních ireducibilních reprezentací obecné lineární grupy a grupy permutační. Explicitní znamená takový, který nepoužívá byť velice elegentní a jednotné, avšak trochu pro konkrétní výpočty na jisté úrovni nepraktické teorie nejvyšší váhy. To ovšem neznamená, že bychom teorii nejvyšší váhy nepoužili. Budeme ji používat, ale její role se z oblasti výsledků výzkumu přenese do oblasti důkazů výsledků nových.

Látka obsažena v tomto textu patří mezi klasické partie, rozpracované již na začátku 20. století zakladateli Schurem, Frobeniem a Weylem. (Převážně) Cartanova teorie nejvyšší váhy je trochu mladší. My však budeme sledovat trochu modernější přístup, uvedený např. v knize Goodmana a Wallacha (viz Goodman, R., Wallach N.: Representation and Invariants of Classical Groups, CUP, 1998), která se opírá o známé Weylovy Abhandlungen.

Vycházíme z toho, že čtenář zná alepsoň základy teorie nejvyšší váhy, tj. všechny konečně dimenzionální ireducibilní reprezentace $SL(n,\mathbb{C})$ se pokládají za známé - alespoň co do klasifikace (pro jistotu některé výsledky pro grupu $GL(n,\mathbb{C})$ uvedeme). **Fourierova analýza** spolu s několika základními fakty o **polojednoduchých algebrách** nám umožní zjistit počet všech ireducibilních reprezentací grupy $\mathfrak{S}_k$. Použité metody jsou v jistém slova smyslu pouze oprášené a do nového hávu převlečené metody klasické, používané již Schurem a Frobeniem. Konkrétně o polojednoduchých alegbrách $\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_k$ zjistíme, že počet jejich ireducibilních reprezentací se rovná počtu jednoduchých sumandů takové alegbry. Dále se ukáže, že počet konjugačních tříd konečné grupy je roven dimenzi prostoru centrálních elementů její grupové algebry $\mathbb{C}[G]$. Bijektivnost Fourierovy transformace $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}(V_k)$ poskytne, že prostor centrálních elementů je izomorfní s lineárním obalem idempotentů v $\mathrm{End}(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{End}(V_k)$, který má dimenzi rovnou počtu jednoduchých komponent, tj. k. Díky předchozímu je tedy počet ireducibilních reprezentací roven počtu konjugačních tříd.

Věta o dvojitém komutantu nás přivede k myšlence zkoumat reprezentace $\mathfrak{S}_k$ pomocí reprezentací jejího komutantu. Jakmile se zjistí, že komutantem je právě tenzorová reprezentace grupové algebry grupy lineární obecné (**Schurova dualita**), bude zřejmé, že teorie nejvyšší váhy pro $GL(n,\mathbb{C})$ může zaujmout své místo v argumentacích týkajících se grupy symetrické. Jelikož nám věta o dvojitém komutantu umožní parametrziovat neekvivalentní ireducibilní $\mathfrak{S}_k$-moduly (brané jako podmoduly $\otimes^k \mathbb{C}^n$, na níž permutační grupa působí permutovaním pořadí vektorů v k-tenzoru) pomocí jisté množiny, označené pro tuto chvíli M, související s reprezentacemi $GL(n, \mathbb{C})$, budeme vědět, že pokud počet prvků M je větší nebo roven počtu prvků konjugačních tříd $\mathfrak{S}_k$, obdržíme ireducibilní reprezentace $\mathfrak{S}_k$ všechny. Kupodivu M bude množina vah $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ grupy $GL(n, \mathbb{C})$ splňujících relaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i = k$, tj. budou to rozklady (prvky množiny $Par(k, n)$) čísla k na nejvýše n částí - nezapomeňte, že váhy konečně rozměrných reprezentací jsou celočíselné. Vzpomenete-li si, že počet konjugačních tříd permutační grupy je roven počtu rozkladů, uvidíte, že volíme - li $n \geq k$, je $M = Par(k)$, tj. přesně tolik, co konjugačních tříd a tedy jako neekvivalentních ireducibilních reprezentací grupy $\mathfrak{S}_k$. Intimita Schurovy věty o dualitě je nahlédnuta alespoň z formálního - uživatelského hlediska: rozklady hrají roli jak pro $GL(n, \mathbb{C})$, tak pro $\mathfrak{S}_k$. Zatímco pro $\mathfrak{S}_k$-moduly dáme popis jejich báze, pro moduly $GL(n, \mathbb{C})$ poskytneme alespoň projektory reprezentace známé (tzv. tenzorové) na ně. Technika bude založena na použití tzv. Youngových diagramů a tabeleaux.

Poslední část textu se věnuje aplikacím reprezentací v absorpční spektroskopii. Matematickým prostředkem budou tzv. Murnaghan-Nakayamova pravidla. Zmíníme se také o klasickém přístupu, a sice o Schurových relacích ortogonality, které suplují užití Fourierovy transformace. Tzv. 1. Schurovy relace lze snadno dokázat i bez ní, druhé lze také dokázat bez jejího použití - snadněji však s její pomocí.

Hermann Weyl (1885 Hamburg - 1955 Zurich). Studoval v Mnichově a Götingenu. Jeho školitelem v Götingenu byl David Hilbert. Ve 20. letech se zabýval hlavně teorií Riemannových ploch a rozvinul teorii reprezentací - především zobecnil Schurovy výsledky a dokázal tzv. Weylovu formuli pro charaktery. Na své pozici v Zurichu, kde spolupracoval s Einsteinem, se zabýval kvantovou mechanikou (Gruppentheorie und Quantummechanik). Uvedl první klasickou teorii sjednocující elektromagnetizmus s obecnou relativitou. Roku 1933 kvůli původu emigroval do USA (Princeton). Souhlasil s Husserlem, když tvrdil víceméně filozoficky, že Cantorovo kontinuum je iluzí.

Issai Schur (1875 Mogyljov, býv. Rusko - 1941 Tel-Aviv). Na studiích v Berlíně byl žákem Frobenia. Spolu s Frobeniem a Burnsideem založili teorii reprezentací. Zabýval se Galoisovou teorií a byl průkopníkem kohomologických grup. Po tlaku Bieberbacha odešel 1939 do Palestiny.

Elie Cartan (1869 Chambery - 1951 Paris). Prácoval na Lieových algebrách; dokončil úplnou klasifikaci započatou Wilhelmem Killingem pomocí automorfizmů jistých geometrických struktur - objev G_2 aj. výjimečných jednoduchých Lieových alegber. Vypracoval teorii nejvyšší váhy. Zobecnil v té době již neudržitelný Kleinův Erlangenský program, zobecňujíce takto i Darbouxovu teorii "kinematiky" (objev tzv. Cartanovy konexe). Byl prezidentem Academie Francais roku 1945.

Ferdinand Frobenius(1849 Berlin-Charlottenburg - 1917 Berlin). Studoval u Ernsta Kummera, Leopolda Kroneckera a Karla Weierstrasse v Götingenu. Dokázal Sylowovy věty pro "abstraktní" grupy. Habilitoval se a profesuru získal v rodném Berlíně, kde také rozvinul teorii charakterů v reprezentační teorii konečných grup, dříve užívané jen v teorii čísel.

2 Asociativní algebry a jejich reprezentace

2.1 Základní definice a příklady

Definice 2.1. Nechť $\mathcal{A}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Buď μ $\mathbb{C}$-bilineární zobrazení

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (x,y) & \mapsto & xy := \mu(x,y), \quad (x,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A} \end{array}$$

takové, že platí

$$(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z\in\mathcal{A},$$

pak $\mathcal{A}$ se nazývá *asociativní algebra.* Existuje-li navíc v algebře $\mathcal{A}$ jednotkový prvek $\mathbf{1}$ takový, že platí

$$\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x \quad \forall x\in\mathcal{A},$$

pak $\mathcal{A}$ se nazývá *asociativní algebra s jednotkou.*

Příklad 2.2. Buď G grupa, $\mathbb{C}[G] := \{f : G\to\mathbb{C};\ \mathrm{supp}(f)\ \text{konečná}\}$, kde $\mathrm{supp}(f) := \{x\in G; f(x)\neq 0\}$. Pak $\mathbb{C}[G]$ je asociativní algebra s jednotkou. Báze $\mathbb{C}[G]$ je tvořená vektory $\delta_x,\ x\in G$:

$$\delta_x(y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{pro } x\neq y \\ 1 & \text{pro } x = y \end{cases}.$$

Rozvoj libovolného elementu $\mathbb{C}[G]$ v této bázi má tvar

$$x = \sum_{g\in G} x(g)\delta_g,\ x\in\mathbb{C}[G],$$

násobení má následující tvar (konvoluce):

$$\begin{array}{rcl} x*y & = & \displaystyle\sum_{(g,h)\in G^2} x(g)y(h)\delta_{gh} \\ (x*y)(g) & = & \displaystyle\sum_{k\in G} x(k)y(k^{-1}g) \end{array}$$

Jednotkový prvek je $\mathbf{1}=\delta_e$, kde e je jednotka grupy G.

Příklad 2.3. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ konečné dimenze. Pak $\mathrm{End}(V)$ je asociativní algebra s jednotkou.

Definice 2.4. Buď $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ asociativní algebry s jednotkou. Zobrazení $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, které splňuje

$$\rho(x)\rho(y) = \rho(xy)\, \forall x, y \in \mathcal{A},\ \rho(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'$$

se nazývá *homomorfizmus asociativních algeber.*

Poznámka 2.5. Je-li $\Phi : G \to H$ grupový homomorfizmus grup G a H, pak jej lze rozšířit na homomorfizmus asociativních grupových algeber

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[H],\ \sum x(g)\delta_g \mapsto \sum x(g)\delta_{\Phi(g)}$$

Definice 2.6. Buď $\mathcal{A}$ asociativní algebra, V vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{C}$, $\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V)$ homomorfizmus asociativních algeber. Pak uspořádaná dvojice (ρ, V) se nazývá *reprezentace algebry $\mathcal{A}$ na V*, vektorový prostor V se nazývá *$\mathcal{A}$-modul reprezentace ρ.*

Definice 2.7. Podprostor $U \subseteq V$, při zadané reprezentaci $\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V)$ se nazývá *$\mathcal{A}$-invariantní, popř. jen invariantní, pokud U je $\mathcal{A}$-podmodul V, tj. pro každý $x \in \mathcal{A}$ a $v \in U$ je $\rho(x)v \in U$.*

Definice 2.8. Reprezentace (ρ, V) se nazývá ireducibilní, pokud obsahuje jen triviální podmoduly, $\{0\}$ a V.

Definice 2.9. Reprezentace (ρ, V) algebry $\mathcal{A}$ je *věrná*, pokud platí $\mathrm{Ker}(\rho) = 0$.

Definice 2.10. Nechť (ρ, V) a (τ, W) jsou reprezentace $\mathcal{A}$. Zobrazení $T : V \to W$, které splňuje

$$T(\rho(a)v) = \tau(a)(T(v))\ \forall a \in \mathcal{A}, v \in V,$$

se nazývá *splétající zobrazení, popř. homomorfizmus $\mathcal{A}$-modulů V a W*. Množina všech splétajících homomorfizmů tvoří vektorový prostor, který se značí $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$. Podobně se definuje i $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V)$.

Definice 2.11. Reprezentace (ρ, V) a (τ, W) algebry $\mathcal{A}$ jsou *izomorfní*, pokud existuje splétající izomorfizmus V a W, t.j. invertibilní splétající homomorfizmus. Značíme $(\rho, V) \cong (\tau, W)$.

Věta 2.12 (Schurovo lemma)**.** *Nechť (ρ, V) a (τ, W) jsou konečně dimenzionální ireducibilní reprezentace algebry $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{C}$. Potom platí*

$$\dim\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } (\rho, V) \cong (\tau, W) \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Důkaz.

(1) Nejdříve předpokládejme, že τ není ekvivalentní s ρ. Vezmi $T \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$. Jelikož $\mathrm{Ker}(T)$ je invariantní podprostor ve V a V je ireducibilní, existují pouze dvě možnosti: $\mathrm{Ker}(T) = V$, nebo $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Pokud nastane první možnost, je $T = 0$. Pokud nastane druhá, je třeba podívat se i na obor hodnot $\mathrm{Rng}(T)$ splétajícího T. $\mathrm{Rng}(T)$ je pro splétající homomorfizmus také invariantní podprostor, tentokráte reprezentace W, a proto opět z předpokladu její ireducibility plyne, že $\mathrm{Rng}(T) = \{0\}$, nebo $\mathrm{Rng}(T) = W$. Pokud nastane první možnost, je $T = 0$, pokud nastane druhá, tak užitím faktu $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, který v tomto případě předpokládáme, dostaneme, že T je izomorfizmus, tj. $\tau \cong \rho$, což je ve sporu s počátečním předpokladem, a proto tato možnost nenastane, tj. ve všech případech $T = 0$.

(2) Nyní předpokládejme $\tau \cong \rho$ a vezměme $0 \neq T,\ S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$, které jistě existují. Navíc se jedná o izomorfizmy, neboť nebyly-li by monomorfizmy nebo epimorfizmy, opět by byly $\mathrm{Ker}(T)$ resp. $\mathrm{Rng}(T)$ netriviálními invariantními podprostory V resp. W, a tak bychom díky ireducibilitě dostali spor. Tedy jistě mohu vytvořit automorfizmus $T^{-1}S \in \mathrm{Aut}(V)$ z předpokladu konečné dimenze V má alespoň jedno nenulové vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$. Platí tedy $\mathrm{Ker}(T^{-1}S - \lambda \mathbb{I}_{\mathbb{V}}) \neq 0$. Jelikož $T^{-1}S - \lambda \mathbb{I}_{\mathbb{V}} \in \mathrm{End}(V)$, je jeho jádro je invariantní vůči reprezentaci ρ. Z ireducibility pak dostáváme

$$\mathrm{Ker}(T^{-1}S - \lambda \mathbb{I}_{\mathbb{V}}) = V \Rightarrow T^{-1}S - \lambda \mathbb{I}_{\mathbb{V}} = 0,$$

tedy $S = \lambda T$. Dimenze $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ je proto jedna. (Kdybychom byli volili T nebo S jako 0, byli bychom dostali lineární závislost automaticky.)

$\square$

Věta 2.13 (Burnside)**.** *Buď (ρ, V) konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace asociativní algebry $\mathcal{A}$. Předpokládejme $\rho(\mathcal{A}) \neq 0$. Pak $\rho(\mathcal{A}) = \mathrm{End}(V)$.*

Poznámka 2.14. Z předchozí věty vyplývá, že dimenze obrazu netriviální ireducibilní reprezentace asociativní algebry je dána dimenzí daného $\mathcal{A}$-modulu.

Definice 2.15. Buď (ρ, V) reprezentace asociativní algebry $\mathcal{A}$. Pokud pro všechny $\mathcal{A}$-invariantní podprostory $U \subseteq V$ existuje $\mathcal{A}$-invariantní podprostor $U' \subseteq V$ takový, že $U \oplus U' = V$, pak (ρ, V) se nazývá *úplně reducibilní.*

Poznámka 2.16. Je-li $\mathcal{A}$-modul V konečné dimenze, pak V je úplně reducibilní právě tehdy, když existuje rozklad na ireducibilní podmoduly

$$V = \bigoplus_{k=1}^{d} V_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz zleva doprave je snadný - indukcí podle dimenze úplně reducibilní reprezentace.

2.2 Rozklad na izotypické komponenty

Definice 2.17. Buď U ireducibilní $\mathcal{A}$-modul. Potom $[U]$ je třída všech ekvivalentních, t.j. izomorfních, $\mathcal{A}$-modulů. Množina všech tříd ekvivalence se značí $\hat{\mathcal{A}}$.

Definice 2.18. Nechť prostory U jsou ireducibilní $\mathcal{A}$-moduly. Buď V úplně reducibilní $\mathcal{A}$-modul. Potom prostor

$$V_{(\xi)} := \sum_{U \subset V,\, [U]=\xi} U, \quad \xi \in \hat{\mathcal{A}}$$

se nazývá *ξ-izotypická komponenta prostoru V*. Symbolem E_ξ značíme reprezentanta třídy $\xi \in \hat{\mathcal{A}}$.

Poznámka 2.19. Buď $\xi \in \hat{\mathcal{A}}$. Definujme lineární zobrazení S_ξ:

$$S_\xi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V) \otimes E_\xi \to V, \quad S_\xi(u \otimes w) := u(w)$$

pro $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V), \quad w \in E_\xi$. Pak S_ξ je splétající homomorfizmus a platí

$$S_\xi(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V) \otimes E_\xi) \subset V_{(\xi)},$$

jak nahlédneme následovně. Snadno zjistíte, že S_ξ je splétající zobrazení $\mathcal{A}$-modulů, jak jsem se již zmínili, přičemž akci na $\mathrm{Hom}(E_\xi, V) \otimes E_\xi$ definujeme předpisem $x.(u \otimes w) := u \otimes x.w$ pro $x \in \mathcal{A}$, $u \in \mathrm{Hom}(E_\xi, V)$ a $w \in E_\xi$. Dokažme inkluzi $S_\xi(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V) \otimes E_\xi) \subset V_{(\xi)}$. Nechť $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V)$, potom jak plyne z úplné reducibility V, je $\mathrm{Rng}(u) \cong E_\xi$, nebo $\mathrm{Rng}(u) = \{0\}$ dle Schurova lemmatu, tj. $\mathrm{Rng}(u) \subseteq V_{(\xi)}$.

Věta 2.20. *Buď V úplně reducibilní $\mathcal{A}$-modul, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_d$ buď rozklad na ireducibilní $\mathcal{A}$-podmoduly* [1]*. Potom platí*

$$V_{(\xi)} = \bigoplus_{[V_j]=\xi} V_j, \quad \forall \xi \in \hat{\mathcal{A}},$$

dále

$$V = \bigoplus_{\xi \in \hat{\mathcal{A}}} V_{(\xi)}.$$

Zobrazení S_ξ z předchozí poznámky je pak izomorfizmus $\mathcal{A}$-modulů:

$$S_\xi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V) \otimes E_\xi \cong V_{(\xi)}.$$

Důkaz.

[1] Tyto výroky jsou ekvivalentní podle poznámky 2.15.

(1) Direktnost sumy plyne z direktnosti rozkladu na ireducbilní podmoduly $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_d$. Triviální je inkluze $\bigoplus_{i,[V_i]=\xi} V_i \subseteq V_{(\xi)}$. Zbývá tedy $V_{(\xi)} \subseteq \bigoplus_{i,[V_i]=\xi} V_i$. Nechť $a \in V_{(\xi)}$. Tedy jistě existuje $l \in \mathbb{N}$, že $a = \sum_{i=1}^{l} u_i$, kde $u_i \in U_i$, kde $[U_i] = \xi$, tj. U_i je libovolný podmodul V typu ξ, $i = 1, \ldots, l$. Rozložme $a = \sum_{i=1}^{d} v_i$, kde $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, d$. Navíc direktní rozklad $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_d$ přichází vybaven projekcemi $p_i : V \to V_i$, které jsou splétajícími homomomorfizmy. Aplikujme p_j pro věchna $j = 1, \ldots, d$ na prvek a psaný jako

$$\sum_{i=1}^{d} v_i = a = \sum_{i=1}^{l} u_i.$$

Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{d} p_j(v_i) = p_j(a) = \sum_{i=1}^{l} p_j(u_i) = \sum_{i=1}^{l} p_{j|U_i}(u_i),$$

kde jsme v posledním kroku restringovali projekce na prostor, v němž leží elementy, na které projekce působí. Nalevo dostaneme v_j. Sumujeme-li předchozí rovnost přes $j = 1, \ldots, d$, dosteneme $\sum_{j=1}^{d} v_j = a = \sum_{i,j} p_{j|U_i} u_i$. Z Schurova lemmatu (viz 2.11) plyne, že $p_{j|U_i} = 0$, když $V_j \ncong U_i$, tj. když $[V_j] \neq \xi$, tj. $a = \sum_{j,[V_j]=\xi} w_j$, kde $\sum_i p_{j|U_i} u_i =: w_j \in V_j$, c.b.d.

(2) Direktnost rozkladu na izotypické komponenty plyne z předchozího bodu a z direknosti $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_d$. Dokažme netriviální inkluzi $V \subseteq \bigoplus_{\xi \in \hat{\mathcal{A}}} V_{(\xi)}$. Pro $a \in V$ existuje rozklad $a = \sum_{i=1}^{d} a_i$, kde $a_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, d$. Jelikož víme, ž $\forall i = 1, \ldots, d$ existuje $\xi \in \hat{\mathcal{A}}$, že $[V_i] = \xi$, je inkluze dokázána.

(3) Víme dík bodu 1, že $V_{(\xi)} \cong E_\xi \oplus \ldots \oplus E_\xi$ (m komponent), kde E_ξ je reprezentant třídy ξ. Nalezneme bázi $U := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V)$. Zvolíme splétající homomorfizmy $\phi_j \in U$ tak, že $\phi_j(w) = (0, 0, \ldots, w, 0, \ldots, 0)$, kde definujeme, že $w \in E_\xi$ stojí na j-té pozici v rozkladu ξ-té izotypické komponenty $V_{(\xi)}$ na reprezentanty E_ξ. Nyní uvažujme libovolné $u \in U$. Zřejmě je $\mathrm{Rng}(u) \subseteq V_{(\xi)}$, jak plyne z předchozí poznámky. Dále $u(w) = (u_1(w), \ldots, u_m(w))$ pro $w \in E_\xi$, kde m je počet sumandů ve $V_{(\xi)}$- viz výše. Zde $u_i \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E_\xi)$. Podle Schurova lemmatu (viz 2.11) je ale $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E_\xi) \cong \mathbb{C}\mathbf{1}$. Je tedy $u(w) = (c_1 w, \ldots, c_m w) = \sum c_i \phi_i(w)$. Tedy víme, že $u = \sum c_i \phi_i \ \forall u \in U$, systém $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}$ tvoří bázi U.

Konečně ukážeme izomorfizmus $U \otimes E_\xi \cong V_{(\xi)} (\cong E_\xi \oplus \cdots \oplus E_\xi)$. Nechť $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ je báze E_ξ. Nejdříve surjektivita S_ξ z předchozí poznámky. Pro $\forall i$ a $\forall j$ chceme najít $\psi \in U \otimes E_\xi$, že $S_\xi(\psi) = (0, \ldots, 0, v_i, 0, \ldots, 0)$, kde v_i je na j-té pozici. Aplikujeme zobrazení S_ξ (z předchozí poznámky) na $\psi := \phi_j \otimes v_i$.

$$S_\xi(\phi_j \otimes v_i) = \phi_j(v_i) = (0, \ldots 0, v_i, 0 \ldots, 0),$$

odkud je zřejmá surjektivita zobrazení S_ξ. Injektivitu dokážeme následovně. Uvažme $0 = S_\xi(\sum_{i,j} c^{ji}\phi_j \otimes v_i) = (\sum_i c^{1i}v_i, \dots, \sum_i c^{mi}v_i)$, odkud protože $\{v_i\}_i$ je lineárně nezávislá plyne, že $c^{ij} = 0$, a proto S_ξ je izomorfizmus $\mathcal{A}$-modulů. (O homomorfizmu S_ξ víme již, že je splétající zobrazení - viz poznámku **??**)

□

Poznámka 2.21. Úplně reducibilní reprezentace se tedy rozpadá na izotypické komponenty $V_{(\xi)} \cong E_\xi \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E_\xi, V)$.

Poznámka 2.22. Platí tedy, že rozklad na izotypické komponenty je jednoznačný, a proto i rozklad na ireducibilní sumandy je jednoznačný modulo izomorfizmus a pořadí, spc. počet ireducibilních sumandů je jednoznačný.

Definice 2.23. *Multiplicita* ireducibilní reprezentace ξ na V je $m_V(\xi) := \#\{j; [V_j] = \xi\} = \dim \mathrm{Hom}_A(E_\xi, V)$, kde $\#\{\}$ je počet prvků dané množiny.

Poznámka 2.24. Z výše uvedené věty plyne, že pojem multiplicity je jednoznačný, neboť pojem ξ-té izotypické komponenty je dobře definován, a proto i počet ireducibilních sumandů, na které se rozkládá je pevný, např. z uvážení dimenze.

Definice 2.25. Asociativní algebra $\mathcal{A}$ se nazývá *jednoduchá*, pokud pro každý oboustranný ideál $\mathcal{B}$ v této algebře platí $\mathcal{B} = 0$ nebo $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Následující věta je velmi důležitá v teorii jednoduchých asociativních algeber. Na rozdíl od jednoduchých Lieových alegber, je podle ní taková algebra určena jednoznačně svou dimenzí. Věta je důsledkem Burnsideova teorému.

Věta 2.26 (Waddeburn)**.** *Buď V konečnědimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Pak asociativní algebra* $\mathrm{End}(V)$ *je jednoduchá. Naopak, je-li $\mathcal{A}$ komečnědimenzionální jednoduchá asociativní algebra s jednotkou, pak existuje komplexní vektorový prostor V konečné dimenze takový, že $\mathcal{A} \cong \mathrm{End}(V)$.*

Důkaz.

(1) Nechť $\mathcal{B}$ je oboustranný netriviální vlastní ideál algebry $\mathrm{End}(V)$. Nejdříve dokážeme, že V je ireducibilní jako $\mathcal{B}$-modul. K tomu bude potřeba zjistit, že $\mathcal{B}v = V$ pro každý nenulový $0 \neq v \in V$. Snadno nahlédnete, že pro každý nenulový $v \in V$ je $\mathrm{End}(V)v = V$. Jedna inkluze je zřejmá. Pro druhou uvažme libovolný $w \in V$ a definujme $f \in V^*$, lineární funkcionál, pro který $f(v) = 1$ - jeho existence plyne z konečnosti dimenze (konstrukce pomocí báze). Stačí položit $T = wf$, tj. $T(v) = wf(v)$, z čehož $T(v) = wf(v) = w.1 = w$, tedy $T \in \mathrm{End}(V)$ je nelezeno. Dík tomu, že $\mathcal{B}$ je pravý ideál, můžeme psát: $\mathcal{B}v = \mathcal{B}\mathrm{End}(V)v = \mathcal{B}V$. Z toho, že $\mathcal{B}$ je levý ideál, plyne, že

$\mathcal{B}V$ je (levý) End(V)-podmodul V, a proto s uvážením toho, že $\mathcal{B}V \neq \{0\}$, dík ireducibilitě V jako End(V)-modulu snadno dostaneme, že $\mathcal{B}V = V$. Celkem tedy $\mathcal{B}v = V$. Nyní se obraťme k důkazu toho, že V je ireducibilní $\mathcal{B}$-modul. Nechť existuje vlastní netriviální $\mathcal{B}$-podmodul W modulu V, tj. existuje $0 \neq y \in V - W$. Zvolme libovolné $0 \neq x \in W$. Díky $\mathcal{B}x = V$ víme, že existuje $T \in \mathcal{B}$, že $Tx = y$, tj. W není invariantní podprostor V. Nyní užijeme Burnsideovu větu (viz 2.12) pro námi uvažovanou reprezentaci, tj. $id : \mathcal{B} \to \mathrm{End}(V)$, o níž nyní víme, že je ireducibilní. Dle ní je $id(\mathcal{B}) = \mathrm{End}(V)$, tj. $\mathcal{B}$ není vlastní, což poskytuje spor.

(2) Nyní uvažujme jednoduchou asociativní algebru s jednotkou $\mathcal{A}$. Definujeme reprezentaci ρ:

$$\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}), \qquad \rho(x)\eta = x\eta.$$

Vezmeme levý vlastní ideál nejmenší dimenze $V \subset \mathcal{A}$ a zúžíme reprezentaci ρ na V:

$$\rho_{|V} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V).$$

To je možné udělat díky tomu, že V je levý ideál. Z požadavku na minimální dimenzi ideálu V vyplývá, že reprezentace $\rho_{|V}$ je ireducibilní. Pak lze použít Burnsideovu větu, ze které vyplývá $\rho_{|V}(\mathcal{A}) = \mathrm{End}(V)$. Z definice reprezentace $\rho_{|V}$ je patrné, že její jádro obsahuje pouze nulu, takže reprezentace je věrná a zobrazení $\rho_{|V}$ je izomorfizmus:

$$\mathcal{A} \cong \rho_{|V}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{End}(V).$$

□

2.3 Příklady: Bialgebry a Hopfovy algebry

Definice 2.27. Buď $\mathcal{A}$ asociativní algebra s jednotkou $\mathbf{1}$, algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ asociativní algebra s jednotkou $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ a s násobením

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac) \otimes (bd)$$

. *Strukturou bialgebry na* $\mathcal{A}$ pak rozumíme dvojici zobrazení Δ, ϵ definované

$$\begin{array}{rcll} \Delta : \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \text{konásobení} \\ \epsilon : \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} & \text{kojednotka,} \end{array} \tag{2.1}$$

které splňuje podmínky

$$\begin{array}{rcll} (I_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\Delta(a)) & = & (\Delta \otimes I_{\mathcal{A}})(\Delta(a)) \quad \forall a \in \mathcal{A} & \text{koasociativita} \\ (I_{\mathcal{A}} \otimes \epsilon)(\Delta(a)) & = & (\epsilon \otimes I_{\mathcal{A}})(\Delta(a)) \quad \forall a \in \mathcal{A} & \text{kojednotkový zákon} \end{array}$$

Příklad 2.28. Buď $\mathcal{A} = \mathbb{C}[G]$ grupová algebra s jednotkou δ_e. Definujeme operaci konásobení

$$\Delta(\delta_x) = \delta_x \otimes \delta_x.$$

kojednotku definujeme

$$\epsilon(\delta_x) = 1.$$

Ověření koasociativity, stačí na bazických vektorech:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes 1_{\mathcal{A}})(\Delta(\delta_x)) &= (\Delta \otimes 1_{\mathcal{A}})(\delta_x \otimes \delta_x) = (\delta_x \otimes \delta_x) \otimes \delta_x = \\ &= \delta_x \otimes (\delta_x \otimes \delta_x) = (1_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\delta_x).\end{aligned}$$

Ověření kojednotky:

$$(\epsilon \otimes 1_{\mathcal{A}})\Delta(\delta_x) = (\epsilon \otimes 1_{\mathcal{A}})(\delta_x \otimes \delta_x) = 1 \otimes \delta_x = \delta_x \otimes 1 = (1_{\mathcal{A}} \otimes \epsilon)(\delta_x \otimes \delta_x) = (1_{\mathcal{A}} \otimes \epsilon)\Delta(\delta_x).$$

Dále definujeme bilineární operaci $<,>: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, kde

$$< \psi, \varphi >:= \sum_{x \in G} \psi(x)\varphi(x),$$

pak platí

$$< \Delta(f), g \otimes h >=< f, gh > .$$

Ve výrazu gh máme na mysli bodové násobení, nikoliv konvoluci. Rovnost opět ověříme na bazických vektorech:

$$\begin{aligned}< \Delta(\delta_x), \delta_y \otimes \delta_z >= \textstyle\sum_{x'} \Delta(\delta_x)(x')(\delta_y \otimes \delta_z)(x') = \sum (\delta_x \otimes \delta_x)(x')(\delta_x \otimes \delta_x)(x') \\ = \textstyle\sum \delta_x(x')\delta_x(x')\delta_y(x')\delta_z(x') =< \delta_x, \delta_y \delta_z >\end{aligned}$$

Příklad 2.29. Buď $\mathbb{C}[G]$ komutativní algebra s bodovým násobením. Zavedeme izomorfizmus

$$\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[G \times G] : (\delta_x \otimes \delta_y) \leftrightarrow \delta_{(x,y)},\ x, y \in G.$$

Zavedeme konásobení a kojednotku:

$$\Delta f(x, y) := f(xy), \qquad \epsilon(f) := f(\mathbf{1}).$$

Snadno nahlédneme, že platí $\Delta(f) = \sum_{x,y \in G} f(xy)\delta_x \otimes \delta_y$. Pro bazické vektory tedy platí $\Delta(\delta_x) = \sum_{y,z=x} \delta_x \otimes \delta_y$. Pomocí bazických vektorů dokážeme koasociativitu:

$$\begin{aligned}(1_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\Delta(\delta_x)) &= \sum_{yz=x} (1_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\delta_x \otimes \delta_y) = \sum_{yz=x} (\delta_x \otimes \Delta(\delta_z)) = \\ &= \sum_{yz=x} \sum_{uv=z} \delta_y \otimes \delta_u \otimes \delta_v = \sum_{yuv=x} \delta_y \otimes \delta_u \otimes \delta_v.\end{aligned}$$

ke stejnému výsledku dospějeme i pro pravou stranu. Pro kojednotkový zákon máme

$$(\epsilon \otimes 1_{\mathcal{A}})\Delta(\delta_x) = \sum_{yz=x} (\epsilon \otimes 1_{\mathcal{A}})(\delta_y \otimes \delta_z) = \sum_{yz=x} \epsilon(\delta_y) \otimes \delta_z = \delta_x.$$

Prvá strana je opět analogická. Stejně jako v předchozím příkladě ukážeme $< \Delta(f), g \otimes h >=< f, g \star h >$. Zde již máme konvoluci. Pro levou stranu tedy máme:

$$< \Delta(\delta_x), \delta_y \otimes \delta_z > \sum_{a,b \in G} \Delta(\delta_x)(a,b)(\delta_y \otimes \delta_z)(a,b) = \sum_{a,b \in G} \delta_x(ab)\delta_y(a)\delta_z(b).$$

Pro pravou stranu pak máme

$$< \delta_x, \delta_y \star \delta_z >= \sum_{a \in G} \delta_x(a)\delta_k \delta_y(k)\delta_z(k^{-1}a) = \sum_{b,k \in G} \delta_x(kb)\delta_y(k)\delta_z(a).$$

Definice 2.30. Buď $\mathcal{A}$ bialgebra s konásobením a kojednotkou, S zobrazení $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *antiautomorfizmus*, t.j.

$$S(xy) = S(y)S(x) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Pak zobrazeni S se nazývá *antipod*, platí-li

$$\begin{aligned} \mu((S \otimes 1_{\mathcal{A}})(\Delta(a))) &= \epsilon(a)1 \\ \mu((1_{\mathcal{A}} \otimes S)(\Delta(a))) &= \epsilon(a)1 \quad \forall a \in \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je násobení v algebře. Algebra $\mathcal{A}$ se pak nazývá *Hopfova algebra.*

Příklad 2.31. Grupová algebra $\mathbb{C}[G]$ s konvolucí je Hopfova algebra s antipodem $(Sf)g := f(g^{-1})$. Vlastnost 2.2 ověříme na bazických vektorech:

$$\mu(S \otimes 1_{\mathcal{A}})(\Delta(\delta_x)) = \mu(S \otimes 1_{\mathcal{A}})(\delta)_x \otimes \delta_x) = \mu(\delta_{x^{-1}} \otimes \delta_x) = \delta_e.$$

Analogicky pro druhou identitu.

Poznámka 2.32. Grupová algebra $\mathbb{C}[G]$ s bodovým násobením je Hopfova algebra se stejným antipodem jako výše.

2.4 Reprezentace $\mathrm{End}(V)$

Věta 2.33. *Buď automorfizmus $\Phi \in Aut(End(V))$, V je konečnědimenzionální komplexní vektorový prostor. Pak existuje $g \in \mathrm{End}(V)$ tak, že $\Phi(x) = g^{-1}xg \quad \forall x \in \mathrm{End}(V)$. Jinými slovy: každý automorfizmus na $\mathrm{End}(V)$ je vnitřní.*

Důkaz. Viz [GW] nebo dodatek. $\square$

Definice 2.34. Buď $\mathcal{A}$ asociativní algebra, pak lineární zobrazení $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, které splňuje $D(xy) = xD(y) + D(x)y \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$ nazýváme derivací $\mathcal{A}$.

Věta 2.35. *Nechť D je derivace* $\mathrm{End}(V)$. *Pak existuje operátor $A \in \mathrm{End}(V)$ takový, že platí*

$$D(x) = [A, x] \equiv Ax - xA \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. Viz [GW] nebo dodatek. □

Věta 2.36. *Až na ekvivalenci existuje jediná netriviální konečnědimenzionální reprezentace algebry* $\mathrm{End}(V)$, *jmenovitě reprezentace* (τ, V) :

$$\tau(x)v = xv \quad \forall x \in \mathrm{End}(V), v \in V.$$

Důkaz. Buď (ρ, W) libovolná netriviální ireducibilní reprezentace algebry $\mathrm{End}(V)$. Jelikož $\mathrm{End}(V)$ je jednoduchá a $\mathrm{Ker}(\rho)$ invariantní podprostor je buď $\mathrm{Ker}(\rho) = \{0\}$, nebo $\mathrm{Ker}(\rho) = \mathrm{End}(V)$. V duhém případě je $\rho = 0$, tj. ρ je triviální. V prvním případě je ρ izomorfizmus na svůj obraz, a proto $\mathrm{End}(V) \cong \rho(\mathrm{End}(V))$. Pravý člen je díky Burnsideovve teorému, jehož předpoklad $(\rho(\mathrm{End}(V)) \neq \{0\})$ jsme ověřili, izomorfní $\mathrm{End}(W)$. Ze zrovnání dimenzí existuje tedy $T : V \to W$ (obecně ne izomorfizmus $\mathcal{A}$-modulů). Označme $\phi(x) = T^{-1}\rho(x)T \quad \forall x \in \mathrm{End}(V)$. Jelikož $\mathrm{Ker}(\rho) = 0$, je zobrazení ϕ izomorfizmus na V, tj. $\phi \in \mathrm{Aut}\ (\mathrm{End}(V))$. Z předchozí věty vyplývá, že existuje $g \in GL(V)$ tak, že $\phi(x) = gxg^{-1}$. Nyní definujeme zobrazení $S := (Tg)^{-1} \in \mathrm{Iso}(W, V)$ a ukážeme, že se jedná o splétající homomorfizmus. Buď $w \in W$. Pak $S(\rho(x)w) = ST\phi(x)T^{-1}(w) = STgxg^{-1}T^{-1}(w) = g^{-1}T^{-1}Tgxg^{-1}T^{-1}(w) = xS(w) = \tau(x)S(w)$. Tedy reprezentace (τ, V) a (ρ, W) jsou ekvivalentní. □

Věta 2.37. *Buď* $\mathcal{A} = \mathrm{End}(V)$, (ρ, W) *konečněrozměrná reprezentace* $\mathcal{A}$. *Potom* $\dim W = m \cdot \dim V$, *kde* $m = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W)$ *a existuje lineární bijekce* $T : W \to V^m$ *taková, že* $T\rho(x)w = \tau(x)Tw$, *pro každý* $w \in W$, *kde* $\tau = id \oplus \ldots \oplus id$ *(suma m elementů). Je tedy* $W \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) \otimes V$, *kde akce* $\mathcal{A}$ *má tvar* $x(u \otimes v) := u \otimes (xv)$.

Důkaz. Jelikož $\dim W < \infty$ a je obecně reducibilní, existuje ireducibilní podmodul $W_1 \subset W$. Dále uvažujme množinu $\{U \subseteq\subseteq W; W_1 \subset U, W_1 \neq U\}$, kde $\subseteq\subseteq$ značí podmodul. Pomocí Zornova lemmatu z ní vybereme nejmenší prvek, který označíme W_2. Díky minimalitě W_2 je W_2/W_1 ireducibilní $\mathcal{A}$-modul, neboť, nebyl-li by ireducibilní, nalezli bychom invariantní podprostor $U \subsetneq W_2/W_1$, jehož předobraz projekcí $\pi : W_2 \to W_2/W_1$ ve W_2 označme U'. Je tedy $U' \subsetneq W_2$ invariantní podprostor. Zároveňn $W_1 \subsetneq U'$, neboť $W_1 = \pi^{-1}(\{0\})$ a $U' = \pi^{-1}(U)$ a jistě $\{0\} \subsetneq U$. Takoto dostáváme spor s minimalitou.

Induktivně pak konstruujeme *Jordan-Hölderovu posloupnost* ireducibilních $\mathcal{A}$-modulů $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_n = W$, kde W_{i+1}/W_i jsou ireducibilní pro

$i = 1, \ldots, n-1$. Z předchozí věty víme, že $W_{i+1}/W_i \cong V$ jako $\mathcal{A}$-moduly. Odtud vyplývá $\dim W = \dim W_n = \dim V + \dim W_{n-1} = \dim V + \dim V + \dim W_{n-2} = \ldots = m \dim V$, neboť $W_1 \cong V$, protože zúžením reprezentace ρ na W_1 dostáváme ireducibilní reprezentaci, která je podle předchozí věty, pokud netriviální, izmomorfní V.

Bijekci T zkonstruujeme indukcí podle n.

1) Je-li $n = 1$, pak $W_1 = W \cong V$. Izomorfizmus zprostředkující splétající zobrazení označme $T_1 : W_1 \to V$.

2) Předpokládejme, že námi dokazovaný výrok platí pro Jordan-Hölderovu posloupnost délky $n-1$. Tj. jistě platí pro W/W_1, neboť Jordan-Hölderova posloupnost pro W/W_1 má tvar $W_1/W_1 \subseteq W_2/W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_n/W_1 = W/W_1$, tj. je délky $(n-1)$, neboť první člen je $\{0\}$, a tudíž se do délky dle našich konvencí nepočítá. Na základě indukčního předpokladu víme tedy, že $W/W_1 \cong V^{(n-1)}$ a také to, že příslušný izomomorfizmus $\mathcal{A}$-modulů

$$T_2 : W/W_1 \to V^{(n-1)}$$

splňuje $T_2\rho(x)w = \tau(x)T_2w$ pro $x \in \mathcal{A}$, $w \in W/W_1$ a zde $\tau = id \oplus \ldots \oplus id$ ($(n-1)$-krát).

Definujme nyní zobrazení $T : W \to V^{(n)}$, které bude kandidátem na splétání W a V^n. Víme také, že existuje $T_1 : W_1 \cong V$. Označme $\pi : W \to W/W_1$ přirozenou faktorprojekci. Vezměme nyní libovolný podprostor (nikoliv nutně podmodul - jeho existenci dosud neznáme) $Z \subset W$ takový, že $Z \oplus W_1 = W$ a označme projekce

$$P : W \to Z, \quad Q : W \to W_1.$$

Vezměme nyní $w \in W$ a definujeme $T : W \to V^{(n)} : T(w) := (T_1Q(w), T_2\pi P(w))$. Je snadné nahlédnout, že T je izomorfizmus vektorových prostorů. Pokud $0 = T(w) = (T_1Q(w), T_2\pi P(w))$, pak $0 = T_2\pi P(w)$, tj. $P(w) \in W_1$, odkud $w = 0$. Surjektivita plyne z toho, že $\dim W = \dim V^{(n)}$. Abychom dokázali, že T je splétající homomorfizmus, proveďme následující úvahy. Zvolme $w_1 \in W_1$ a $z \in Z$. Potom

$$T\rho(x)(w_1 + z) = (T_1Q\rho(x)(w_1 + z), T_2\pi P\rho(x)(w_1 + z)) = (\star).$$

Jelikož evidentně $Q\rho(x)w_1 = \rho(x)w_1$, neboť $\rho(x)w_1 \in W_1$, a protože $P\rho(x)w_1 = 0$ a $\pi P = \pi$, můžeme psát

$$\begin{aligned}(\star) &= (T_1\rho(x)w_1 + T_1Q\rho(x)z, T_2\rho(x)\pi z) = (T_1\rho(x)w_1 + T_1Q\rho(x)z, T_2\pi\rho(x)z) \\ &= (xT_1w_1 + T_1Q\rho(x)z, xT_2\pi z),\end{aligned}$$

kde jsme nejdříve použili fakt, že faktorprojekce π je splétající homomorfizmus, tj. $\pi\rho = \rho\pi$, a potom indukčního předpokladu, že T_1 i T_2 jsou splétající operátory. Indukční předpoklady (T_1 a T_2 splétají) pro tento případ znějí: $T_1\rho(x)w_1 = xv_1$, kde $w_1 = Tv_1$, a $T_2\rho(x)\pi z = (xv_2, \dots, xv_m)$, kde $T_2\pi z = (v_2, \dots, v_m)$. Je tedy mozžno předchozí rovnost napsat jako

$$T\rho(x)w = (xv_1 + T_1Q\rho(x)z, xv_2, \dots, xv_m).$$

Věnujme se nyní operátoru $T_1Q\rho(x) : Z \to V$. Předně spočtěme Tz pro $z \in Z$. $Tz = (T_1Qz, T_2\pi Pz) = (0, T_2\pi z)$. Pišme $T_1Q\rho(x)z = T_1Q\rho(x)T^{-1}Tz = T_1Q\rho(x)T^{-1}(v_2, \dots v_n)$, kde $Tz =: (v_2, \dots, v_n)$, jak jsme oprávněni psát dle předchozího výpočtu. Tedy hodnota $T_1Q\rho(x)$ v bodě $z \in Z$ závisí jen na $(v_2, \dots, v_n)$. Lze proto místo $TQ\rho(x)z$ psát $\sum_{i=2}^m \mu_i(x)v_i$, kde $\mu_i \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$. Ukážeme, že μ_i je derivace na $\mathcal{A}$, tj. že platí $\mu_i(xy) = x\mu_i(y) + \mu_i(x)y$. Vyjdeme z rovnosti $T\rho(xy)w = T\rho(x)[\rho(y)w]$. Protože nás zajímá pouze první složka, pišme pro levou stranu jen ji; s touto licencí:

$$L = xyv_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i(xy)v_i.$$

Pravou stranu pišme celou

$$P = T\rho(x)(yv_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i(y)v_i, yv_2, \dots, yv_n) =$$

$$= (xyv_1 + x\sum_{i=2}^n \mu_i(y)v_i + \sum_{i=2}^n \mu_i(x)yv_i, xyv_2, \dots, xyv_n).$$

Je tedy zřejmě $\mu_i(xy)v_i = x\mu_i(y)v_i + \mu_i(x)yv_i$. Necháme-li v_i probíhat nějakou bázi V, dostaneme obecně

$$\mu_i(xy) = x\mu_i(y) + \mu_i(x)y, i = 1, \dots, n.$$

Podle věty 2.34 tedy existují $A_i \in \mathrm{End}(V)$ tak, že $\mu_i(x) = [A_i, x]$.

Definujme reprezentaci $\tilde{\rho}(x) : V^{(n)} \to V^{(n)}$ předpisem $\tilde{\rho}(x)(v_1, \dots, v_n) = (xv_1 - \sum_{i=2}^n [A_i, x]v_i, xv_2, \dots, xv_n)$. Podle předchozích výpočtů je $\rho \cong \tilde{\rho}$.

Na $V^{(n)}$ definujeme lineární transformaci g: $g \cdot (v_1, \dots, v_n) := (v_1 + \sum_{i=2}^n A_iv_i, v_2, \dots, v_n)$. Inverzní zobrazení je zřejmě

$$g^{-1}(v_1, \dots, v_n) := (v_1 - \sum_{i=2}^n A_iv_i, v_2, \dots, v_n).$$

Snadným výpočtem lze zjistit, že $g^{-1}\tilde{\rho}(x)g(v_1, \dots, v_n) = (xv_1, \dots, xv_n)$. Tedy ρ je ekvivalentní direktnímu součtu ireducibilních reprezentací $\mathrm{End}(V)$ na V.

Nyní již víme, že $W \cong V^{(n)}$. Proto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, V^{(n)}) = n$. Toto číslo jsme se však ve formulaci věty zavázali označit symbolem m. Tj. všude tam, kde jsme psali n, jsme byli mohli psát m.

Nyní již jen rozepišme izomorfizmus $T' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V, W) \otimes V \cong W$. $T'(K \otimes v) := Kv$. Ukazme, že se jedná o splétající izomorfizmus. Nejdříve splétání. $T'x.(K \otimes v) = T'(K \otimes x.v) = K(x.v) = xKv = xT'(K \otimes v)$, neboť K je splétající zobrazení. Pro důkaz izmomorfnosti T' stačí injektivita, neboť dimenze oboru hodnot a dimenze prostoru, do kterého zobrazujeme, se shodují, kvuli] faktu $W \cong V^m$ (přesněji ještě používáme Schurovu dualitu). K injektivitě Přespokládejme, že platí $0 = T'(K \otimes v)$, tj. $0 = Kv$, jelikož $K = \mu\mathrm{Id}$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{C}$, je $v = 0$ (pokud $\mu \neq 0$) nebo $K = 0$, pokud $\mu = 0$. V každém případě je $K \otimes v = 0$, tj. T' je monomorfizmus.

□

% toto je text od Zuzky + doplněné Sváťou.

2.5 Polojednoduché algebry

Definice 2.38. Nechť $\mathcal{A}$ je asociativní algebra s jednotkou. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *polojednoduchá*, pkud je direktní sumou jednoduchých. Tedy existuje izomorfizmus algeber

$$\Phi : \mathcal{A} \simeq \bigoplus_{\lambda \in L} \mathrm{End}(V^\lambda),$$

kde L je nějaká konečná množina.

Definujme elementy $E_\lambda \in \bigoplus_{\lambda \in L} \mathrm{End}(V^\lambda)$ jako $0 \oplus \ldots \oplus I_{V^\lambda} \oplus \ldots \oplus 0$ a $e_\lambda = \Phi^{-1}(E_\lambda)$.

Snadno zjistíme, že platí: $E_\lambda^2 = E_\lambda$, a proto i $\Phi(E_\lambda^2) = e_\lambda^2 = e_\lambda$, tj. jak E_λ, tak i e_λ jsou idempotenty

Také platí:

1. $\{e_\lambda\}_{\lambda \in L}$ jsou v centru, neboť každý E_λ je centrální.
2. e_λ jsou minimální: pro μ libovoplný centrální idempotent existuje $M \subset L$, že $\mu = \sum_{\lambda \in M} \pm e_\lambda$, jak lze snadno dokázat.

Je zřejmě $\Phi(\mathcal{A})E_\lambda = \bigoplus_\mu \mathrm{End}(V^\mu)E_\lambda = \mathrm{End}(V^\lambda)$, což pokytne reprezentaci (π^λ, V^λ), danou předpisem $\pi^\lambda(x) := \Phi(x)E_\lambda$, což je dle předchozí identifikace prvek $\mathrm{End}(V^\lambda)$.

Věta 2.39. (π^λ, V^λ) *jsou právě všechny vzajemně neekvivalentní ireducibilní reprezentace polojednoduché algebry* $\mathcal{A}$.

Důkaz. Nejprve dokažme ireducibilitu. Je zřejmě $\pi^\lambda(\mathcal{A}) = \Phi(\mathcal{A}) = \mathrm{End}(V^\lambda)$. Nechť $W \subseteq V^\lambda$ je netriviální vlastní podmodul ve V^λ. Nechť $0 \neq w \in W$, a zvolme $v \in V^\lambda - W$. Jistě (viz Waddeburnova věta) existuje $T \in \mathrm{End}(V^\lambda)$, e $Tw = v$. Jelikož však $\pi^\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{End}(V^\lambda)$, existuje $x \in \mathcal{A}$, že $T = \pi(x)$, tj. $\pi(x)w = v$, což je spor; je tedy (π^λ, V^λ) ireducibilní reprezentace. Nyní ukážeme neekvivalenci. Předpokládejme, že $T : V^\lambda \to V^\mu$ splétá akci π^λ a π^μ. Jsitě $\pi^\lambda(e_\lambda x) = \pi^\lambda(e_\lambda)\pi^\lambda(x) = \Phi(e_\lambda)\pi^\lambda(x) = E_\lambda \pi^\lambda(x) = \pi^\lambda(x)$. Lze tedy psát

$$T\pi^\lambda(x) = T\pi^\lambda(xe_\lambda) = \pi^\mu(e_{\lambda x})T = \pi^\mu(e_\mu e_\lambda x)T = 0,$$

neboť $e_\lambda e_\mu = 0$, pokud $\mu \neq \lambda$, tj. celkem, neboť x bylo libovolné, poskytne $T = 0$, což implikuje $(\pi^\lambda, V^\lambda) \ncong (\pi^\mu, V^\mu)$. Dokažme, že každá ireducibilní reprezentace (π, V) je izomorfní nějaké π^λ. Jelikož $V = \pi(1)V = \pi(\sum_{\lambda \in L} e_\lambda)V$, existuje λ, že $\pi(e_\lambda)V \neq 0$. Budeme chtít ukázat, že $\pi \cong \pi^\lambda$. $\pi(e_\lambda)V$ je ireducibilní, neboť $\pi(x)\pi(e_\lambda)V = \pi(xe_\lambda)V = \pi(e_\lambda)\pi(x)V \subseteq \pi(e_\lambda)V$, tj. $\pi(e_\lambda)V$ je invariantní. Dík ireducibilitě V platí tedy $V = \pi(e_\lambda)V$, a tedy také $\pi(e_\lambda)V$ je ireducibilní. Vezměme $L \ni \mu \neq \lambda$ a spočtěme $\pi(e_\mu)V = \pi(e_\lambda)\pi(e_\mu)V = \pi(e_\mu e_\lambda)V = 0$, tj. $\pi(x) = \pi(\sum_{\nu \in L} e_\nu x) = \pi(e_\lambda x)$. Uvažme homomorfizmus $\Phi : e_\lambda \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V^\lambda)$ daný předpisem $e_\lambda x \mapsto \pi^\lambda(x) \in \mathrm{End}(V^\lambda)$. Snadno zjistíte, že se jedná o izomorfizmus. Je tedy (π, V) ireducibilní reprezentace $\mathrm{End}(V^\lambda)$. Dle věty existuje lineární izomorfizmus $T : V \to V^\lambda$, že

$$T\pi(e_\lambda x) = \pi^\lambda(e_\lambda x)T,$$

což lze dle předchozích relací přepsat na cílovou $T\pi(x) = \pi^\lambda(x)T$, tj. $(\pi, V) \cong (\pi^\lambda, V^\lambda)$. □

Poznámka 2.40. Podle předchozí věty je $\hat{\mathcal{A}} \simeq L$.

Věta 2.41. *Nechť $\mathcal{A} \simeq \bigoplus \mathrm{End}(V^\lambda)$ a nech (ρ, W) je konecne dimenzionalna reprezentacia $\mathcal{A}$. Polozme $U^\lambda = \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(V^\lambda, W)$ pre $\lambda \in \hat{\mathcal{A}}$ a definujme linearne zobrazenie*

$$S : \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} U^\lambda \otimes V^\lambda \to W, S(\sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} u_\lambda \otimes v_\lambda) = \sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} u_\lambda(v_\lambda).$$

Potom s je $\mathcal{A}$-izomorfizmus a

$$S^{-1}\rho(x)S = \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} I_{V^\lambda} \otimes \pi^\lambda(x)$$

Důkaz. Nechť $P_\lambda = \rho(e_\lambda)$. Jelikož ρ je reprezentace, je $P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda$, $\sum_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} P_\lambda = I_W$. Tedy $W = \sum_\lambda W^\lambda$, kde$W^\lambda = P_\lambda W$ a $\rho(e_\lambda \mathcal{A})W^\mu = \delta_{\lambda\mu} W^\lambda$, takže W^λ je modul pro $e_\lambda \mathcal{A}$. Nech $S_\lambda : U^\lambda \otimes V^\lambda \to W^\lambda$ je $\mathrm{End}(V^\lambda)$-izomorfizmus T' z vety 2.36. Definujeme-li $S := \bigoplus_\lambda S_\lambda$, je S $\mathcal{A}$-izomorfizmus. □

Důsledek 2.42. *Nechť $\mathcal{A}$ je polojednoduchá algebra. Pro každý $\lambda \in \hat{\mathcal{A}}$ nech je e_λ asociovany centralní idempotent. Pro každou konečně dimenzionalní reprezentaci $\mathcal{A}$ λ-izotypický podprostor je $\rho(e_\lambda)V$ a izotypická dekompozice se rovná $V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{\mathcal{A}}} \rho(e_\lambda)V$.*

Důkaz. Plyne z předchozí věty. □

Nyní citujme věty, které jsou opačné k větám v tomto pododdílu dokázaným. Říkají, že úplná reducibilita je výsadou polojednoduchých algeber.

Věta 2.43. *Nech $\mathcal{A}$ je asociativna algebra s jednotkou, (ρ, V) jej uplne rozlozitelna reprezentacia. Potom $\mathcal{B} = \rho(\mathcal{A})$ je polojednoducha.*

Poznámka 2.44. Speciálně je-li ρ věrná, je i $\mathcal{A}$ polojednoduchá.

Věta 2.45. *Nechť G je reduktivní linearní algebraická grupa, (ρ, V) její regularní reprezentace. Potom $\rho(\mathbb{C}[G])$ je polojednoduchá.*

Důkaz. Jedna z možných definic reduktivnosti říká, že každá reprezentace takovéto grupy je úplně reducibilní, tj. dle pědchozí věty je $\rho(\mathbb{C}[G]$ polojendoduchá, neboť je-li reprezentace reucibilní pro G, je reducibilní i pro $\mathfrak{C}[G]$. □

Věta 2.46. *Nech $\mathfrak{g}$ je reduktivna Lieova algebra, (ρ, V) jej konecne dimenzionalna reprezentacia, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ centrum algebry $\mathfrak{g}$. Ak pre vsetky $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ je $\pi(Z)$ diagonalizovatelna, tak $\pi(U(\mathfrak{g}))$ je polojednoducha.*

Příklad 2.47. Nech $\mathcal{A}$ je asociativna algebra s jednotkou a $L : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(\mathcal{A}), L(a)x = ax$. Nech $T \in \mathrm{End}(\mathcal{A}), [T, L(\mathcal{A})] = 0$. Dokazte, ze existuje $b \in \mathcal{A}$ tak, ze $T(a) = ab$.

Oznacme $b = T(1)$. Potom $ab = L(a)T(1) = TL(a)(1) = T(a)$.

Příklad 2.48. Nech G je grupa, $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}[G])$. Nech T komutuje s lavyni translaciami $L_g, g \in G$. Dokazte, ze existuje $\varphi \in \mathbb{C}[G] : T(f) = f * \phi$.

Oznacme $\varphi = T(1)$. Potom $T(f) = TL_f(1) = L_f T(1) = L_f \varphi = f * \varphi$.

% Writen by: Franc:
% Pridal som nazov: Schurova dualita (?)

2.6 Schurova dualita

Lemma 2.49. *Buďte V, U konečně dimenzionální vektorové prostory a buď $T \in \mathrm{End}(V \otimes U)$. Předpokládejme, že $T(X \otimes I_U) = (X \otimes I_U)T$ pro všechny $X \in \mathrm{End}(V)$. Potom existuje $Y \in \mathrm{End}(U)$, takové že $T = I_V \otimes Y$.*

Důkaz. Pro dané $u^* \in U^*$ definujeme lineární zobrazení $B_{u^*} : V \otimes U \to V$ jako $B_{u^*}(v \otimes u) = u^*(u)v$ pro všechna $u \in U$ a $v \in V$. Dále pro dané $u \in U$ definujeme lineární zobrazení $A_u : V \to V \otimes U$ jako $A_u(v) = v \otimes u$. Nyní položme $S_{u^*,u} = B_{u^*} \circ T \circ A_u$. Potom $S_{u^*,u} \operatorname{End}(V)$ a splňuje

$$\begin{aligned} S_{u^*,u}Xv &= B_{u^*}TA_uXv = B_{u^*}T(Xv \otimes u) = B_{u^*}T(X \otimes I_U)(v \otimes u) = \\ &= B_{u^*}(X \otimes I_U)T(v \otimes u) = B_{u^*}(X \otimes I_U)TA_uvXB_{u^*}TA_uv = \\ &= XS_{u^*,u}v \end{aligned}$$

pro všechna $X \in \operatorname{End}(V)$ a $v \in V$, kde předposlední rovnost plyne z

$$B_{u^*}(X \otimes I_U)(\tilde{v} \otimes \tilde{u}) = B_{u^*}(X\tilde{v} \otimes \tilde{u}) = u^*(\tilde{u})X\tilde{v} = Xu^*(\tilde{u})\tilde{v} = XB_{u^*}(\tilde{v} \otimes \tilde{u}),$$

kde $\tilde{u} \in U$ a $\tilde{v} \in V$. Ze Shurova lemmatu (viz YYY [GW 3.1.1.]) potom plyne existence $c(u^*, u) \in \mathbb{C}$, pro které platí $S_{u^*,u} = c(u^*, u)I_V$. Zřejmě $c(u^*, u)$ je bilineární forma na $U^* \times U$. Protože U je konečné dimenze, existuje $Y \in \operatorname{End}(U)$ takový že $c(u^*, u) = u^*(Yu)$ pro všechna $u \in U$ a $u^* \in U^*$. Potom z definice $S_{u^*,u}$ dostáváme

$$B_{u^*}T(v \otimes u) = S_{u^*,u}(v) = u^*(Yu)v = B_{u^*}T(v \otimes Yu).$$

Jelikož toto platí pro všechna $u^* \in U^*$, dostáváme $T(v \otimes u) = T(v \otimes Yu)$. A tedy $T = I_V \otimes Y$. $\square$

Definice 2.50. Buď V konečně dimenzionální vektorový prostor. Pro libovolnou podmnožinu $S \subset \operatorname{End}(V)$ definujeme množinu

$$\operatorname{Comm}(S) = \{x \in \operatorname{End}(V)\ xs = sx \text{ pro všechny } s \in S\}$$

a nazýváme ji komutant S.

Lze snadno nahlédnout, že $\operatorname{Comm}(S)$ je asociativní algebra s jednotkou I_V. Předpokládejme, že $\mathcal{A} \subset \operatorname{End}(V)$ je polojednoduchá asociativní algebra s jednotkou I_V. Položme $\mathcal{B} = \operatorname{Comm}(\mathcal{A})$. Vektorový prostor $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je pak zřejmě asociativní algebra vůči násobení $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ a $\mathcal{A}$ (respektivě $\mathcal{B}$) je izomorfní s podalgebrou $\mathcal{A} \otimes I_V$ (respektivě $I_V \otimes \mathcal{B}$).

Dle pozorování XXX [GW 3.3.2] existuje $\mathcal{A}$-modulový izomorfismus $V \simeq \bigoplus_{i=1}^r V_i \otimes U_i$, kde V_i je ireducibilní $\mathcal{A}$-modul, $V_i \not\simeq V_j$ pro $i \neq j$ a $U_i = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(V_i, V)$. Dostáváme

$$\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i) \simeq (\bigoplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)) \otimes I_U \simeq \bigoplus_{i=1}^r (\operatorname{End}(V_i) \otimes I_{U_i})$$

Věta 2.51. *(O dvojitém komutantu, DCT [GW 3.3.7]) Buď V konečně dimenzionální vektorový prostor a $\mathcal{A} \subset \operatorname{End}(V)$ polojednoduchá algebra. Potom algebra*

$\mathcal{B} = \mathrm{Comm}(\mathcal{A})$ *je polojednoduchá a* $\mathrm{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. *Navíc platí*

$$\mathcal{B} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (I_{V_i} \otimes \mathrm{End}(U_i)) \tag{2.3}$$

a podporostory $V_i \otimes U_i$ *jsou ireducibilní a odpovídají neekvivalentním reprezentacím algebry* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Důkaz. Dokažme nejdříve izomorfismus v (2.3). Předpokládejme, že $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i \otimes U_i$ a buďte $Y_i \in \mathrm{End}(V_i)$. Chceme ukázat $I_{V_i} \otimes Y_i \in \mathcal{B} = \mathrm{Comm}(\mathcal{A})$. Buď $X_i \otimes I_{U_i} \in \mathcal{A}$. Zřejmě

$$(I_{V_i} \otimes Y_i)(X_i \otimes I_{U_i}) = X_i \otimes Y_i = (X_i \otimes I_{U_i})(I_{V_i} \otimes Y_i)$$

a tedy pravá strana v ((2.3)) je obsažena v levé. Dále zaveďme projekce $P_i : V \to V_i \otimes U_i$ pro všechna $i = 1 \ldots r$ určené rozkladem V. Jelikož se jedná o projekce na V_i je zřejmé, že na U_i je to identita a na ostatních V_j nula. Tedy $P_i \in \mathrm{End}(V_i) \otimes I_{U_i} \in \mathcal{A}$. Je-li $T \in \mathcal{B}$, potom $P_i T = T P_i, \quad T = \sum_{i=1}^{r} T/_{V_i \otimes U_i}$. Stačí, pokud provedeme důkaz pro $r = 1$. V tom případě máme $PT = TP$ a z předchozího lemmatu plyne $T \in I_V \otimes \mathrm{End}(U)$. V obecném případě jednotlivá T_i nascítáme a dostáváme tak druhou stranu inkluze.

Z ((2.3)) dále plyne, že

$$\mathcal{B} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (I_{V_i} \otimes \mathrm{End}(U_i)) \simeq I_V \otimes (\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}(U_i)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}(U_i)$$

a tedy $\mathcal{B}$ je polojednoduchá asociativní algebra a pro $i \neq j$ platí $U_i \not\simeq U_j$ jako $\mathcal{B}$-moduly. Prohodíme-li role $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$i, dostáváme $\mathcal{A} = \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$. A jelikož $\mathrm{End}(V_i \otimes U_i) \simeq \mathrm{End}(V_i) \otimes \mathrm{End}(U_i)$, vidíme, že $V_i \otimes U_i$ jsou ireducibilní $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$-moduly a tyto moduly jsou vzájemně neekvivalentní. $\square$

2.7 Tenzorove reprezentacie $\mathfrak{S}_k$

Nech V je konecne dimenzionalny vektorovy priestor. Nech $\dim V = n$ a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza V. Definujme reprezentaciu $\mathfrak{S}_k$ na $\bigotimes^k V$ takto: Pre usporiadanu k-ticu $I = (i_1, \ldots, i_k), 1 \leq i_p \leq n$ definujeme

$$e_I = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$$

a piseme $|I| = k$. Potom mame

$$\sigma_k(s)(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}) = e_{s^{-1}(i_1)} \otimes \ldots \otimes e_{s^{-1}(i_k)}$$

a pre $H = (\mathbb{C}^\times)^n$ mame $te_i = t_i e_i, t = [t_1, \ldots, t_n] \in H$. Parametrizujme charaktery H pomocou $\mathbb{Z}^n$ tak, ze $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ da charakter

$$t \to t^\lambda = t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \ldots t_n^{\lambda_n}$$

Na H sa mozeme pozerat ako na maximalny torus $GL(V)$. Akcia H na V sa rozsiri na reprezentaciu $GL(V)$ na $\bigotimes^k V$. Pre $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ oznacme

$$V^{\otimes k}(\lambda) = \{u \in V^{\otimes k} : \rho_k(t)u = t^\lambda u\}$$

vahovy priestor pre H. Pre danu k-ticu I definujme $\mu_I = \sharp\{p : i_p = j\}$. Potom $\rho_k(t)e_I = t^{\mu_I} e_I$ pre $t \in H$, takze e_I je vahovy vektor pre H s vahou μ_I. Teda

$$V^{\otimes k}(\lambda) = \begin{cases} \langle e_I ; \mu_I = \lambda \rangle, & \lambda \in \mathbb{N}^n, |\lambda| = k; \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Skutocne, mnozina $\{e_I, |I| = k\}$ je baza $V^{\otimes k}$ a $|\mu_I| = |I|$.

Příklad 2.52. Dokazte, ze akcia $\sigma_k(g)$ a $\rho_K(a)$ spolu komutuju.

$\sigma_k(g)\rho_k(a)e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} = a_1 \ldots a_k e_{g^{-1}(i_1)} \otimes \ldots \otimes e_{g^{-1}(i_k)}$
$\rho_k(a)\sigma_k(g)e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} = a_{g^{-1}(i_1)} \ldots a_{g^{-1}(i_k)} e_{g^{-1}(i_1)} \otimes \ldots \otimes e_{g^{-1}(i_k)}$

Buď V konečně dimenzionální vektorový prostor a ρ definující reprezentace $GL(V)$. Pro všechny celá čísla $k \geq 0$ máme pak reprezentace $\rho_k = \rho^{\otimes k}$ na $\otimes^k V$ definované jako $\rho_k(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$ pro $g \in \mathrm{GL}(V)$. Můžeme tedy permutovat pozici vektoru v tenzorovém součinu bez změny G-akce a existuje tedy následující algebra operátorů, která komutuje s $\rho_k(\mathrm{GL}(V))$.

Definice 2.53. Buď $\mathfrak{S}_k$ grupa permutací množiny $1, 2, \ldots k$. Definujme její reprezentaci σ_k na $\otimes^k V$ jako $\sigma_k(s)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g_{s^{-1}(k)}$ pro $s \in \mathfrak{S}_k$.

Je zřejmé, že $\sigma_k(s)\sigma_k(t) = \sigma_k(st)$ pro $s, t \in \mathfrak{S}_k$ a σ_k je reprezentace $\mathfrak{S}_k$.

Příklad 2.54. $\sigma(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix})(e_1 \otimes e_8 \otimes e_4) = e_8 \otimes e_1 \otimes e_4$

Věta 2.55. *([GW 3.3.8]) Položme $\mathcal{A} = \rho_k(\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)])$ a $\mathcal{B} = \sigma_k(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k])$. Potom $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou polojednoduché a navíc* $\mathrm{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ *a* $\mathrm{Comm}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Důkaz. Jelikož algebra $\mathcal{B}$ je polojednoduchá jakožto grupová algebra konečné grupy, stačí ukázat $\mathrm{Comm}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Zbytek tvrzení pak plyne z věty DCT.

Jelikož $\sigma_k(s)\rho_k(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \rho_k(g)\sigma_k(s)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$ - viz cvičení ZZZ, dostáváme $\mathrm{Comm}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Pro důkaz opačné inkluze zvolme bázi $\{e_1, \ldots, e_k\}$ prostoru V. Je-li I uspořádaná k-tice indexů $I = (i_1, \ldots, i_k)$, kde $1 \leq i_j \leq n$, označme $e_I = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$. Zřejmě $\{e_I\}$ tvoří bázi $\otimes^k V$. Grupa $\mathfrak{S}_k$ permutuje tuto bázi akcí $\sigma_k(s)e_I = e_{s \cdot I}$, kde k-tici indexů $s \cdot I$ definujeme jako $(i_{s^{-1}(1)}, \ldots, i_{s^{-1}(k)})$. Tedy $s \in \mathfrak{S}_k$ mění pozici indexů a ne jejich hodnoty!!! Všimněme si, že $(st) \cdot T = s \cdot (t \cdot T)$ pro $s, t \in \mathfrak{S}_k$.

Předpokládejme, že $T \in \mathrm{End}(\otimes^k V)$ má v bázi $\{e_I\}$ matici $a_{I,J}$ tedy $Te_J = \sum_I a_{I,J} e_I$. Pro $s \in \mathfrak{S}_k$ dostáváme $T(\sigma_k(s)e_J) = T(e_{s\cdot J}) = \sum_I a_{I,s\cdot J} e_I$, zatímco $\sigma_k(s)(Te_J) = \sum_I a_{I,J} e_{s\cdot I} = \sum_I a_{s^{-1}\cdot I,J} e_I$. Tedy $T \in \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ právě tehdy když $a_{s\cdot I, s\cdot J} = a_{I,J}$ pro všechny multiindexy I, J.

Uvažujme nedegenerovanou bilineární formu $(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$ on $\mathrm{End}(\otimes^k V)$. Ukážeme, že restrikce $(\ ,\ )$ je nedegenerovaná i na $\mathrm{Comm}(\mathcal{B})$. Uvažme projekci $\mathrm{End}(\otimes^k V)$ na $\mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ danou $X \mapsto X^{\#} = \frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_k} \sigma_k(s) X \sigma_k(s)^{-1}$. Pro $T \in \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ dostáváme

$$\begin{aligned}(X^{\#}, T) &= \frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{tr}(\sigma_k(s)X\sigma_k(s)^{-1}T) = \frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{tr}(\sigma_k(s)XT\sigma_k(s)^{-1}) = \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{tr}(XT) = \mathrm{tr}(XT)\frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_k} 1 = (X, T).\end{aligned}$$

Nyní $(\mathrm{Comm}(\mathcal{B}), T) = 0$ implikuje $(X, T) = 0$ pro všechny $X \in \mathrm{End}(\otimes^k V)$, čili $T = 0$. Tedy $(\ ,\ )$ je nedegenerovaná i na $\mathrm{Comm}(\mathcal{B})$.

K dokončení důkazu stačí ukázat, že pokud $T \in \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ je ortogonální na $\mathcal{A}$, tak potom $T = 0$, neboli $\mathcal{A} = \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$. Buďte $g \in \mathrm{GL}(V)$ a $ge_j = \sum_i g_{ij} e_i$, potom

$$\begin{aligned}\rho_k(g)e_I &= \rho_k(g)(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = ge_{i_1} \otimes \cdots \otimes ge_{i_k} = \sum g_{j_1 i_1} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes \sum g_{j_k i_k} e_{j_k} = \\ &= \sum g_{j_1 i_1} \ldots g_{j_k i_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} = \sum g_{j_1 i_1} \ldots g_{j_k i_k} e_J = \sum g_{I,J} e_J.\end{aligned}$$

Předpokládejme $(T, \mathcal{A}) = 0$. Potom pro všechna $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ máme

$$(T, \rho_k(g)) = \sum a_{I,J} g_{j_1 i_1} \ldots g_{j_k i_k} = 0, \text{ kde } \begin{array}{l} I = (i_1, \ldots, i_k), \\ J = (j_1, \ldots, j_k). \end{array}$$

Funkci $g \mapsto (T, \rho_k(g))$ lze rozšířit na polynomiální funkci na $M_n(\mathbb{C})$. Jelikož tato funkce dává nulu na husté části $M_n(\mathbb{C})$, dostáváme pro všechny $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ rovnost $\sum a_{I,J} x_{j_1 i_1} \ldots x_{j_k i_k} = 0$. Ukážeme nyní, že tato rovnost spolu s rovností $a_{s\cdot I, s\cdot J} = a_{I,J}$ implikuje $a_{I,J} = 0$ pro všechny multiindexy I, J.

Označme $x_{I,J} = x_{j_1 i_1} \ldots x_{j_k i_k}$ a definujme množinu $\Xi = \{(I, J) : |I| = |J| = k\}$. Grupa $\mathfrak{S}$ má na Ξ akci $s \cdot (I, J) = (s \cdot I, s \cdot J)$ a z druhé rovnosti plyne, že T komutuje s $\mathfrak{S}$ právě tehdy když funkce $(I, J) \mapsto a_{I,J}$ je konstatní na orbitech $\mathfrak{S}$ v Ξ. Akce $\mathfrak{S}$ na Ξ definuje na Ξ relaci ekvivalence danou předpisem $(I, J) \equiv (I', J') \Leftrightarrow (I', J') = s\cdot(I, J)$. Buď Γ množina reprezentantů tříd této ekvivalence na Ξ. Zřejmě $x_\gamma = x_{s\cdot\gamma}$ pro všechny $s \in \mathfrak{S}$ a $\gamma \in \Gamma$. Pokud $x_{I,J} = x_{I',J'}$ tak lze snadno najít permutaci $s \in \mathfrak{S}$, takovou že $I = s\cdot I'$ a $J = s\cdot J'$. Je tedy zřejmé, že každý monomial $x_{I,J}$ lze napsat jako x_γ pro nějaké odpovídající $\gamma \in \Gamma$. Označme $n_\gamma = |\,\mathfrak{S}\cdot\gamma|$ kardinalitu odpovídajícího orbitu a $a_\gamma = a_{I,J}$ pro $(I, J) \in \mathfrak{S}\cdot\gamma$.

Prvou rovnost tedy můžeme přepsat jako $\sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma a_\gamma x_\gamma = 0$. Nyní je ale množina $\{x_\gamma\}$ lineárně nezávislá, a tedy $a_{I,J} = 0$ pro všechny $(I, J) \in \Xi$. $\square$

3 Reprezentace $GL(V)$

Nechť $G = GL(n, \mathbb{C})$. Potom $P_{++}(G)$ sestává ze všech elementů (= vah) tvaru

$$\mu = m_1\varepsilon_1 + \ldots + m_n\varepsilon_n, m_1 \geq \ldots \geq m_n, m_i \in \mathbb{Z}$$

Definujme dominantní váhy $\lambda_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$. Restrikce λ_i na diagonalní matice stopy 0 je fundamentalní váha ϖ_i algebry $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ pro $i = 1, \ldots, n-1$. Váhu μ můžeme přepsat jako

$$\mu = (m_1 - m_2)\lambda_1 + (m_2 - m_3)\lambda_2 + \ldots + (m_{n-1} - m_n)\lambda_{n-1} + m_n\lambda_n$$

Teda $P_{++}(G)$ sestává ze všech vah tvaru $\mu = \sum_1^n k_i\lambda_i, k_i \in \mathrm{Z}, k_1 \geq 0, \ldots, k_{n-1} \geq 0$. Restrikce μ na diagonalní matice stopy 0 je váha

$$\mu_0 = (m_1 - m_2)\varpi_1 + \ldots + (m_{n-1} - m_n)\varpi_{n-1}$$

Věta 3.1. *Nechť $G = GL(n, \mathbb{C})$ a $\mu = \sum_1^n m_i\varepsilon_i$ je dominantní, tj. element $P_{++}(G)$. Potom existuje jediná ireducibilní regularní reprezentace (π, V) grupy G taková, vze*

1. *restrikce π na $SL(n, \mathbb{C})$ ma nejvyšší váhu μ_0*
2. *$\pi(zI_n) = z^{m_1+\ldots+m_n} I_V, z \in \mathbb{C} - \{0\} =: \mathbb{C}^x$*

Naviac reprezentacia $(\check{\pi}, V)$, kde $\check{\pi}(g) = \pi(g^t)^{-1}$, je ekvivalentní dualní reprezentaci (π^*, V^*).

Důkaz. Nechť (π_0, V) je ireducibilní regularní reprezentace grupy $SL(n, \mathbb{C})$ s nejvšší vahou μ_0. Zkonstruujeme reprezentaci grupy $G = GL(n, \mathbb{C})$. Jelikož víme, že $GL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^x.SL(n, \mathbb{C})$, stačí definovat $\pi(zI_n)$ pro každé $z \in \mathbb{C}^x$, což učiníme předpisem $\pi(zI_n) := z^{m_1+\ldots+m_n} I_V$, čímž splníme podmínku (2). Otázkou zůstává, zda restrikce π na $SL(n, \mathbb{C})$ je s nejvyšší vahou μ_0. Reprezentace π_0 je váhy μ_0, a proto $\pi_0(zI) = z^{m_1+\ldots+m_n-(n-1)m_n}$, pro $zI_n \in SL(n, \mathbb{C})$ dle našeho předpisu to však znamená, aby $z^{m_1+\ldots+m_n} = z^{m_1+\ldots+m_{n-1}-(n-1)m_n}$, což je splněno, pokud $z^n = 1$, což je podmínka, aby $zI_n \in SL(n, \mathbb{C})$, což jsme předpokládali. Naopak bylo zřejmé, že jinou extenzi π_0 nebylo lze provést. Druhou část necháváme čtenáři jako jednoduché cviční. $\square$

3.1 Komutující algebra a $\mathfrak{n}$-invarianty

Nechť $\mathfrak{g}$ je komplexní polojednoduchá Lieova algebra. Mějme rozklad $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, kde $\mathfrak{h}$ je Cartanova podalgebra, $\mathfrak{n}$ je direktní součet kořenových podprostorů odpovídajících kladným kořenům a $\bar{\mathfrak{n}}$ záporným kořenům.

V případě grupy G_n je analogií $\mathfrak{n}$ podgrupa horních trojúhelníkových matic (analogií $\bar{\mathfrak{n}}$ jsou dolní trojúhelníkové matice) a budeme ji značit $\mathcal{N}$ případně $\mathcal{N}_n$.

Definice 3.2. Nechť V je $\mathfrak{g}$-modul. Pak definujeme podprostor $\mathfrak{n}$-invariantních vektorů

$$V^{\mathfrak{n}} = \{v \in V : X \cdot v = 0, X \in \mathfrak{n}\}.$$

Připomeňme, že vlastní váhový prostor pro váhu $\mu \in \mathfrak{h}^*$ značíme $V(\mu)$, tedy $V(\mu) = \{v \in V : \forall H \in \mathfrak{h} : Hv = \mu(H)v\}$. Dále z teorie nejvyšších vah označíme V^μ ireducibilní reprezentaci s nejvyšší vahou μ.

V dalším používejme pro každou jednoduchou algebru $\mathfrak{g}$ tzv. trojúhelníkový rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ a pseciálně značme $\mathfrak{n}_+ =: \mathfrak{n}$. Pro maticové jednoduché algebry je existence tohoto rozkladu evidentní, pro ostatní, zvl. pro výjimečné lze použit známou Adoovu větu (viz např Fulton Harris, dodatek E.2), která říká, že i tyto alegbry lze realizovat jako maticové. Připomeňme klasický příklad Lieovy grupy, která není podgrupou žádné maticové grupy, kterým je univerzální nakrytí $SL(2,\mathbb{R})$. Kompaktní čast $SL(2,\mathbb{R})$ je je $SO(2)$ s fundamentální grupou $\mathbb{Z}$, její nakrytí je tedy nekonečné spočetně listé. Pro ty, kteří se nechtěji seznaámit s Adoovou větou, postači fakt, že se budeme zabývat algebrou $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Není snad třeba připomínat, že $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}_-$ jsou nilpotentní. Označme ještě navíc, $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Taková algebra se nazývá borelovská. Na úrvni klasických (nebo dokonce algebraických) grup lze borelovskopu grupu definovat nejmenší řešitelná podgrupa B grupy G taková, že její kofaktor G/B je projektovní varieta, či v řeči Lieových grup kompaktní kofaktor.

Uvažme nyn'i nějakou reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V. Vektor v nazveme $\mathfrak{b}$-extrémní, pokud $\mathfrak{b}\mathbb{C}v \subseteq \mathbb{C}v$; nazveme cyklický, pokud $\mathfrak{g}v = V$. Připomeňmejednu větu, která říká, ž pro $\mathfrak{b}$-extrémní $\mathfrak{g}$-cyklický vektor je $\mathfrak{g}v$ ireducivbilní. Její důkaz v budoucnosti naleznete v dodatcích k těmto textům.

Lemma 3.3. *Nechť V je $\mathfrak{g}$-modul. Pak* $\dim V^{\mathfrak{n}} = 1$, *právě když V je ireducibilní $\mathfrak{g}$-modul.*

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že V je ireducibilní s nejvyšší vahou μ. Nechť v_0 je nějaký nenulový vektor váhy μ, tzv. nejvyšší vektor. Je zřejmě, $\mathbb{C}v_0 \subseteq V^{\mathfrak{n}}$. Navíc víme, že $V(\mu) = \mathbb{C}v_0$, tj. je jednodimenzionální. Chceme proto ukázat, že ve $V^{\mathfrak{n}}$ jiný podprostor neleží. Nechť pro spor je $\dim V^{\mathfrak{n}} > 1$. $V^{\mathfrak{n}}$ je jistě $\mathfrak{h}$ modul, neboť pro $v \in V^{\mathfrak{n}}$, $H \in \mathfrak{h}$ a $X \in \mathfrak{g}_(\alpha)$, kde α je pozitivní kořen vůči trojúhelniíkovému rozkladu. Spočtěme tedy $XHv = HXv - [H,X]v = 0 - \alpha(H)Xv = 0 - 0 = 0$. Tedy $V^{\mathfrak{n}}$ se jako $\mathfrak{h}$-modul rozpadá na váhové podprostory. Jelikož $V^{\mathfrak{n}}$ předpokládáme mí dimenzi větší než jedna, existuje i váha λ, že $V(\lambda) \subseteq V^{\mathfrak{n}}$. Jelikož ale μ je nejvyšš váha, je $\mu \succ \lambda$. Zkusme dokázat opačnou nerovnost, abychom získali spor. Nechť $0 \neq u_0 \in V^{\mathfrak{n}}(\lambda)$, potom jistě $\mathfrak{b}(u_0) \subseteq \mathbb{C}u_0$, neboť také $u_0 \in V^{\mathfrak{n}}$, tj. u_0 je $\mathfrak{b}$-extrémní. Jeho alegbraický $\mathfrak{g}$-obal označme U. Jelikož V je ireducibilní, a U je $\mathfrak{g}$-podmodul, je $U = V$ a tedy u_0 je cyklický. Je tedy jistě $V(\mu) \subseteq U$, a tedy $\mu \succ \lambda$, což je spor.

Naopak, nechť $\dim V^{\mathfrak{n}} = 1$. Jelikož $\mathfrak{g}$ je reduktivní, protože je polojednoduchá, je V úplně reducibilní, a proto se rozpadá na sumu ireducibilních $V = V_1 \oplus \dots V_r$. Víme, že $V^{\mathfrak{n}} = V_1^{\mathfrak{n}} \oplus \dots V_r^{\mathfrak{n}}$ a z předchozí části důkazu, že $\dim V_i^{\mathfrak{n}} = 1$, $i = 1, \dots, r$, tj. $\dim V^{\mathfrak{n}} = r$, z čehož dle přespokladu plyne že $r = 1$, c.b.d. $\square$ $\square$

Označme

$$\mathcal{S} = \{\mu : V^{\mathfrak{n}}(\mu) \neq 0\}.$$

Zřejmě platí, že $V^{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\mu\in\mathcal{S}} V^{\mathfrak{n}}(\mu)$. Uvědomme si, ž ještě pro $V^{\mathfrak{n}}(\mu) := \{v \in V^{\nu}; Hv = \mu(H)v\}$ je $V^{\mathfrak{n}}(\mu) = V^{\mathfrak{n}} \cap V(\mu)$. Zřejmě také platí, že

$$V^{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\mu\in\mathcal{S}} V^{\mathfrak{n}}(\mu).$$

V další větě popíšeme algebru komutujiciích operátorů $\mathrm{End_{fg}(V)} : \{\mathrm{T} \in \mathrm{End(V); XT = TX\forall X\ in}\mathfrak{g}\}$, kde V je nějaká reprezentace $\mathfrak{g}$. Pišme $V_{(\mu)}$ pro izotypickou komponentu jsoucí sumou ireducibilních reprezentací V^{μ} (reprezentace $\mathfrak{g}$ s nejvyšší vahou μ.)

Věta 3.4. *Nechť V je $\mathfrak{g}$-modul. Pak* $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V}) \cong \bigoplus \mathrm{End}(\mathrm{V}^{\mathfrak{n}}(\mu))$ *via restrikční homomorfizmus ϕ, $\phi(T) := T_{|V^{\mathfrak{n}}}$, kde $T \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V})$. Navíc pro každou $\mu \in \mathcal{S}$ je $V^{\mathfrak{n}}(\mu)$ je ireducibilní modul nad* $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V})$. *Vlivem společné akce $\mathfrak{g}$ a $End_{\mathfrak{g}}(V)$ je $V \cong \bigoplus_{\mu\in\mathcal{S}} V^{\mu} \otimes V^{\mathfrak{n}}(\mu)$.*

Důkaz. Nejdříve dokažme, že ϕ je injektivní, tj. nechť $\phi(T) = 0$, to potom ale je $T_{V^{\mathfrak{n}}} = 0$. Uvažme rozklad $V = \bigoplus_{\mu\in P_{++}(\mathfrak{g})} V_{(\mu)}$ na izotypické komponenty, který máme v reduktivním případě vždy k dispozici. Očíslujme ireducibilní sumandy izotypické komponenty následovně $V_{(\mu)} = V_{\mu,1} \oplus \dots \oplus V_{\mu,d(\mu)}$. Navíc platí $V^{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\mu\in\mathcal{S}} V^{\mathfrak{n}}(\mu)$ a také Jelikož $T_{V^{\mathfrak{n}}} = 0$, je jistě $T_{V^{\mathfrak{n}}_{\mu,i}} = 0$ pro každou $\mu \in \mathcal{S}$ a $i = 1, \dots, d(\mu)$, jelikož $V^{\mathfrak{n}}_{\mu,i} = \mathbb{C}v_{\mu,i}$, kde $v_{\mu,i}$ je nějaký vektor nejvyšší váhy - viz pědchozí teorém. Nechť $v \in V_{\mu,i}$, potom, protože vektor nejvyšší váhy je cyklický, je $v = x_1 \dots x_p v_{\mu,i}$. Jelikož T z definice komutuje s uvažovanou reprezentací, je $Tv = T(x_1 \dots x_p v_{\mu,i}) = x_1 \dots x_p T v_{\mu,i} = 0$ dle předchozích úvah. Nyní stačí úvahu provést pro každou váhu $\mu \in P_{++}(\mathfrak{g})$, abychom shledali, že $Tv = 0$ pro každý $v \in V$, tj. $T = 0$, a proto ϕ je monomorfizmus.

Zabývejme se surjektivností zobrazení ϕ. Zatímco v pědchozí části "šechny úvahy probíhaly" pro libovolnou $\mu \in P_{++}(\mathfrak{g})$, v tomto oddílu bude podstatné zúžit svou pozornost na množinu $\mathcal{S}$. Proveďme porovnání dimenzí jako již několikrat při ověřování surjektivnosti v tomto textu. Zvolme $\mu \in \mathcal{S}$

$$\dim \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V}_{(\mu)}) = (\mathrm{mult}_{\mathrm{V}}(\pi^{\mu}))^2 = (\dim \mathrm{V}^{\mathfrak{n}}(\mu))^2 = \dim \mathrm{End}(\mathrm{V}^{\mathfrak{n}}(\mathrm{V})).$$

Using the standard im+ker lemma and the fact, that ϕ is mono, we obtain that ϕ is epi. $V^{\mathfrak{n}}(\mu)$ jsou po dvou neekvivalentní ireducbilní reprezentace algebry $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V})$, jak plyne z theorému 1.37. Izomorfizmus $V \cong \bigoplus_{\mu \in \mathcal{S}} V^{\mu} \otimes V^{\mathfrak{n}}(\mu)$ plyne z věty o dvojitém komutantu, viz větu 1.49. □

Poznámka: Všimněme si, že v přechozí větě je popsán rozklad na izotypické komponenty pro případ reprezentací jednoduchých algeber a je tedy analogií k teorémům 1.18., 1. 35. a 1.39.

%Napsal: Vladimír šišma, strany 21-30

4 Reprezentace konečných grup

V této kapitole nechť G je konečná grupa. Naším úkolem bude popsat reprezentace G, které získáme zkoumáním grupové algebry nad G a Fourierovy transformace.

Definice 4.1. Grupovou algebrou nazveme algebru funkcí z G do $\mathbb{C}$ se sčítáním $+$ a násobením konvolucí $*$. Nechť f, g jsou funkce, $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f*g)(x) &= \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x). \end{aligned}$$

Grupovou algebru značíme $\mathbb{C}[G]$.

Poznámka 4.2. Báze grupové algebry $\mathbb{C}[G]$ je množina $\{\delta_y : y \in G\}$ (kde $\delta_y(x) = 1$ pro $y = x$, jinak je 0) a její dimenze je tedy $\dim(\mathbb{C}[G]) = |G|$.

Poznámka 4.3. Grupová algebra je polojednuchá. Grupa G je konečná, tj. i je reduktivní. Obraz reduktivní grupy libovolnou reprezentací je polojednoduchá algebra. Uvažme speciálně levou regulární reprezentaci $\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(\mathbb{C}[G])$ danou na grupě G předpisem

$$[rho(g)f] = f(g^{-1}h)$$

a extenzí na celou $\mathbb{C}[G]$. Předpokládejme že $\pi(g) = 0$, potom pro každou funkci f dostáváme $f(g^{-1}h) = 0$ pro každé h, tj. i pro každé $g^{-1}h$, tj. f je nulová a prtoto ρ je injektivní, tj. věrná reprezentace. Víme tedy, že injektivní obraz $\mathbb{C}[G]$ je polojednoduchá algebra a z injektivity plyne, že $\mathbb{C}[G]$ je polojednoduchá.

Definice 4.4. Fourierova transformace, značíme $\mathcal{F}$, je zobrazení z grupové algebry $\mathbb{C}[G]$ do $\sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{End}(V^\lambda)$, kde (π^λ, V^λ) jsou všechny ireducibilní reprezentace, s předpisem, kde $f \in \mathbb{C}[G]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f &= \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{F}f(\lambda), \\ \mathcal{F}f(\lambda) &= \sum_{x\in G} f(x)\pi^\lambda(x). \end{aligned}$$

Poznámka 4.5. Fourierova transformace je rozšíření reprezentace G na reprezentaci $\mathbb{C}[G]$: $\mathcal{F}\delta_g(\lambda) = \pi^\lambda(g)$.

Poznámka 4.6. Platí: $\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda)$.

Levá strana: $\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \sum_{x\in G}(f * g)(x)\pi^\lambda(x) = \sum_{x\in G}\sum_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x)\pi^\lambda(x) = \sum_{z,y\in G} f(y)g(z)\pi^\lambda(yz)$. Pravá strana: $\mathcal{F}f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda) = \sum_{x\in G} f(x)\pi^\lambda(x) \sum_{y\in G} g(y)\pi^\lambda(y) = \sum_{x,y\in G} f(x)g(y)\pi^\lambda(xy)$. Obě strany se rovnají.

Poznámka 4.7. Fourierova transformace má svoji analogii v harmonické analýze, kde $Ff(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle} f(y)dy$, kde $e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}$ je analogií $\pi^x(y)$.

Následující dvě věty ukazují, že Fourierova transformace není jen zobrazení, ale ekvivalence a jednu vlastnost o dimenzích reprezentací G.

Věta 4.8. *Fourierova transformace je ekvivalence*

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{End}(V^\lambda).$$

Důkaz. Důkaz plyne přímo z důkazu předešlé poznámky o polojednoduchosti $\mathbb{C}[G]$ a z teorie o polojednoduchých algebrách. □

Věta 4.9. *Platí $|G| = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda^2$, kde d_λ je dimenze reprezentace (π^λ, V^λ).*

Důkaz. $|G| = \dim(\mathbb{C}[G]) = \dim(\bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{End}(V^\lambda)) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \dim(\mathrm{End}(V^\lambda)) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda^2$. □

Ve zbytku této kapitoly je cílem ukázat vztah $|\hat{G}| = |\mathrm{Conj}(G)|$. Důkaz provedeme pomocí algebry centrálních funkcí a jejích vlastností, které dokážeme v následujících dvou větách.

Definice 4.10. Algebra centrálních funkcí je množina

$$\{f \in \mathbb{C}[G] : \forall\varphi \in \mathbb{C}[G], f * \varphi = \varphi * f\}$$

a značíme ji $\mathbb{C}[G]^G$.

Poznámka 4.11. Algebra centrálních funkcí $\mathbb{C}[G]^G$ je podalgebra $\mathbb{C}[G]$, jak lze snadno nahlédnout.

Věta 4.12. *Množina* $\{\varphi_C \in \mathbb{C}[G] : C \in \mathrm{Conj}(G)$, φ_C *je charakteristická funkce na množině* $C\}$ *je báze algebry centrálních funkcí* $\mathbb{C}[G]^G$ *a tedy*

$$\dim(\mathbb{C}[G]^G) = |\mathrm{Conj}(G)|.$$

Důkaz. Hledáme funkce $f \in \mathbb{C}[G]$, které komutují se všemi funkcemi v $\mathbb{C}[G]$. Komutativitu stačí ověřit na bázi algebry $\mathbb{C}[G]$, což je množina $\{\delta_y : y \in G\}$:

$$\begin{aligned} (f * \delta_y)(x) &= \textstyle\sum_{z\in G} f(z)\delta_y(z^{-1}x) &&= f(xy^{-1}) \\ (\delta_y * f)(x) &= \textstyle\sum_{z\in G} \delta_y(z)f(z^{-1}x) &&= f(y^{-1}x) \end{aligned}$$

Pak pro všechny $x, y \in G$ musí platit $f(xy^{-1}) = f(y^{-1}x)$ a po zavedení substituce $x' = xy^{-1}$ pro každé $x', y \in G$

$$f(x') = f(y^{-1}x'y).$$

Tedy funkce f musí být konstatní na konjugačních třídách $\mathrm{Conj}(G)$. Pak f lze zapsat jako lineární kombinace funkcí $\{\varphi_C : C \in \mathrm{Conj}(G)\}$. Tato množina je lineárně nezávislá a proto tvoří bázi algebry centrálních funkcí $\mathbb{C}[G]^G$ a platí $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = |\mathrm{Conj}(G)|$. □

Jedna z předešlých vět dává $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{End}(V^\lambda)$. Dále z teorie o polojednoduchých algeber máme pro každé λ endomorfizmus E_λ, který je bazí jednodimenzionálního centra $\mathrm{End}(V^\lambda)$.

Věta 4.13. *Množina* $\{E_\lambda : \lambda \in \hat{G}\}$ *je báze* $\mathcal{F}(\mathbb{C}[G]^G)$ *a platí* $\mathcal{F}f = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{F}f(\lambda)E_\lambda$, *tedy*

$$\dim(\mathbb{C}[G]^G) = |\hat{G}|.$$

Důkaz. Díky izomorfizmu $\mathcal{F}$ (zachovává centra) a předešlému odstavci platí, že f je centrální funkce právě tehdy, když $\mathcal{F}f(\lambda) = c_\lambda E_\lambda$ pro nějakou konstantu c_λ.

Pak pro $f \in \mathbb{C}[G]^G$ platí

$$\mathcal{F}f = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathcal{F}f(\lambda) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} c_\lambda E_\lambda$$

a z toho přímo plyne dokazované $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = |\hat{G}|$. □

Důsledek 4.14. *Nechť* G *je konečná grupa, pak platí* $|\hat{G}| = |\mathrm{Conj}(G)|$, *což je okamžitý důsledek předešlých dvou vět:* $|\hat{G}| = \dim(\mathbb{C}[G]^G) = |\mathrm{Conj}(G)|$.

Příklad 4.15. Nechť G je permutační grupa na čtyřech prvcích $\mathcal{G}_4$. Pak dle důsledku má pět ireducibilních reprezentací, protože má pět tříd konjugací a to $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, (4).

Dle věty XXX ($|G| = \sum_\lambda d_\lambda^2$) můžeme určit dimenze všech (pěti) ireducibilních reprezentací, mezi nimi jsou již známé jednodimenzionální standartní a znaménková reprezentace: $24 = |G| = 1+1+2^2+3^2+3^2$. Jiné kombinace pěti kvadrátů se dvěma jedničkami a se součtem 24 neexistují.

Pak G má pět ireducibilních reprezentací s dimenzemi 1, 1, 2, 3, 3. Pro jiné grupy $\mathcal{G}_n$ s větším n předešlý postup nemusí dávat jednoznačné výsledky, které lze ale vždy získat pomocí Schurovy duality, Youngových tabulek a "hákového" vzorce (viz další kapitoly).

5 Tenzorové reprezentace $\mathrm{GL}(V)$

V této kapitole označme obecnou lineární grupu $G_n = GL(n, \mathbb{C})$, permutační grupu na k prvcích $\mathcal{G}_k$. Zopakujme, že budeme uvažovat reprezentace na vektorovém prostoru $\bigotimes^k \mathbb{C}^n$ označme ρ_n, σ_k s předpisy:

$$
\begin{aligned}
\rho_n : \mathrm{G}_n \to \mathrm{Aut}(\bigotimes^k \mathbb{C}^k) : \quad & \rho_n(g)(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k) = \quad gu_1 \otimes gu_2 \otimes \cdots \otimes gu_k \\
\sigma_k : \mathcal{G}_k \to \mathrm{Aut}(\bigotimes^k \mathbb{C}^n) : \quad & \sigma_k(s)(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_k) = \quad u_{s^{-1}(1)} \otimes u_{s^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes u_{s^{-1}(k)}.
\end{aligned}
$$

Naším úkolem je popsat reprezentace G_n, k čemuž nám dopomůže následující Schurova dualita, která nám ukáže souvislosti s reprezentacemi grupy $\mathcal{G}_k$.

5.1 Schurova dualita

Věta 5.1. *(Schurova dualita) Nechť $\mathcal{A} = \rho_n(\mathbb{C}[\mathrm{G}_n])$, $\mathcal{B} = \sigma_k(\mathbb{C}[\mathcal{G}_k])$ jsou asocitivní algebry. Pak*

$$\bigotimes^k \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^d U_i \otimes V_i$$

je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-modul zapsaný jako rozklad na ireducibilní komponenty, kde $d \in \mathbb{N}$ a U_i respektive V_i jsou ireducibilní navzájem různé reprezentace G_n respektive $\mathcal{G}_k$.

Důkaz. Z věty 1.53 v kapitole o dvojitém komutantu plyne $\mathcal{A} = \mathrm{Comm}(\mathcal{B})$ (navíc $\mathcal{A}$ je polojednoduchá, tudíž i $\mathcal{B} = \mathrm{Comm}(\mathcal{A})$), ostatní plyne přímo z věty o dvojitém komutantu. $\square$

Ze Schurovi duality plyne, že reprezentace G_n a $\mathcal{G}_k$ lze jednoznačným způsobem párovat. Dále se tedy zaměříme konkrétně na jejich výskyty v $\bigotimes^k \mathbb{C}^n$, na popis jejich párování a jejich projektory.

Nejdříve identifikujme U_i. Víme, že se jedná o ireducibilní G_n-moduly. Každý takový modul je dle teorie nejvyšší váhy určen jednoznačně až na izomorfizmus určen svou nejvyšší vahou $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i$, o které víme, že je integrální a dominantní, tj. $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$ a zároveň $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. NJavíc v předchozím jsme určili, jak vypadají váhové prostory $\bigotimes^k \mathbb{C}^n$, viz 1.7, kde jsme zjistili, že λ je váha, právě když $|\lambda| := \sum_{i=1}^n \lambda_i = k$ a $\lambda_i \in \mathbb{N}$. Tj. speciálně nejvyšší váha musí splňovat tyto podmínky. Označme množinu všech vah λ, pro které $|\lambda| = k$ a zároveň $\lambda_i \in \mathbb{N}$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_1 > 0$ symbolem $Par(k, n)$ a nazývejme je rozkladem (particí) k na nejvýše n částí. Zatím tedy máme přiřazení $s : \{1, \ldots, d\} \to Par(k, n)$, o kterém víme, že je injektivní díky teorému o dvojitém komutantu. Zmiňme se o Cartanově součinu, abychom zjistili, že s je nejen injkce, ale i surjekce na $Par(k,n)$.

Nechť $\lambda, \mu \in P_{++}(\mathfrak{g})$, zde $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ je Lieova alegbra všech endomorfizmů a $P_{++}()\mathfrak{g}$ semigrupa všech integrálních dominantních vah. Uvažme reprezentace (π^λ, V^λ) a (π^μ, V^μ) spolu s jejich tenzorovým součinem $(\pi^\lambda \otimes \pi^\mu, V^\lambda \otimes V^\mu)$. V dalším bude naším zájmem dokázat násl. větu.

Lemma 5.2. *Tenzorový součin $V^\lambda \otimes V^\mu$ obsahuje reprezentaci s nejvyšší vahou $\lambda + \mu$ a to právě jednou, tj. s multiplicitou jedna.*

Důkaz. Snadno ukážete (proveďte), že

$$(V^\lambda \otimes V^\mu)(\nu) = \sum_{\rho+\sigma=\nu, \rho\in\chi(\lambda), \sigma\in\chi(\mu)} V^\lambda(\rho) \otimes V^\mu(\sigma),$$

kde $\chi(\kappa)$ značí (Φ^+-saturovanou) množinu vah reprezentace (π^κ, V^κ). Zvolme ve V^λ resp. V^μ nějaký vektor nejvyšší váhy v_λ resp. v_μ. Snadno zjistíte (proveďte), že $v_\lambda \otimes v_\mu$ je $\mathfrak{b}$-extrémní. Proto jeho $\mathfrak{g}$-obal je ireducibilní, je totiž $\mathfrak{b}$-extrémní a $\mathfrak{g}$-cyklický ve svém obalu. Nejvyšší váha tohoto ireducibilního modulu je zřejmě vahou vektoru $v_\lambda \otimes v_\mu$ (, který je navíc jejím nejvyšším vektorem), tj. $\lambda + \mu$. Dle vzorce z počátku důkazu je

$$(V^\lambda \otimes V^\mu)(\lambda + \mu) = \sum_{\rho+\sigma=\nu, \rho\in\chi(\lambda), \sigma\in\chi(\mu)} .$$

Z teorie nejvyšší váhy víme, že $\rho \preccurlyeq \lambda$ a $\sigma \preccurlyeq \mu$. Pokud by $\rho \prec \lambda$ nebo $\sigma \prec \mu$, potom by $\rho + \sigma \prec \lambda + \mu$ a nikoliv $\rho + \sigma = \lambda + \mu$. Je tedy nutně $\rho = \lambda$ a $\sigma = \mu$. Jelikož $V^\lambda(\lambda)$ a $V^\mu(\mu)$ jsou jednodimenzionální, je i $(V^\lambda \otimes V^\mu)(\lambda + \mu)$ jednodimanionální. Pokud by v uvažovaném tenzorovém součinu leželo více ireducibilních modulů s nejvyšší vahou $\lambda+\mu$, byla by i dimenze váhového prostoru s vahou $\lambda + \mu$, tj. ziskali bychom spor. $\square$

Předchozí lemma nás opravňuje k nasledující definici.

Definice 5.3. Ireducibilní modul s nejvyšší vahou $\lambda+\nu$ vyskytující se v modulu $\pi^\lambda \otimes \pi^\mu$ se nazývá Cartanův součin a značí se $V^\lambda \diamond V^\mu$.

Pozn.: Z přednášek víte, že se značí jinak - opravím, až se povrtám v TEXu.

Pokračujeme v identifikaci zobrazení $s : \{1, \ldots, d\} \to Par(k,n)$. Zvolme $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i$ tak, aby $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in Par(k,n)$ jinak libovolně. Chceme dokázat surjektivitu s, tj. existenci modulu uvnitř rozkládaného součinu s nejvyšší vahou

λ. Definujme následující přirozená čísla

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mu_1 + \ldots + \mu_n\\ \lambda_2 &= \mu_2 + \ldots + \mu_n\\ &\vdots\\ \lambda_n &= \mu_n\end{aligned}$$

(Poznamka: Unipotentní matice s koeficienty v $\mathbb{Z}$ má inverzi nad $\mathbb{Z}$, o čemž se v tomto konkrétním případě můžete přesvědčit přímým výpočtem nebo obecně pomocí věty o výpočtu inverze pomoí determinantu a algebraických doplňků.)

Jistě platí

$$\bigotimes^k \mathbb{C}^n = \bigotimes^{\mu_1} \mathbb{C}^n \otimes \bigotimes^{2\mu_2} \mathbb{C}^n \otimes \ldots \bigotimes^{n\mu_n} \mathbb{C}^n.$$

Odkud snadno

$$(\bigwedge^1 \mathbb{C}^n)^{\otimes\mu_1} \otimes (\bigwedge^2 \mathbb{C}^n)^{\otimes\mu_2} \otimes \ldots (\bigwedge^n \mathbb{C}^n)^{\otimes\mu_n} \subseteq \bigotimes^k \mathbb{C}^n.$$

Z teorie reprezentací $SL(n,\mathbb{C})$ víme, že $i$tá fundamentální (tj. jejíž nejvyšší váha je $i$tá fundamentální váha ϖ_i) je izomorfní $\bigwedge^i \mathbb{C}^n$, kde $\mathbb{C}^n = F(\varpi_1)$, kde $F(\tau)$ je standardní označení ireducibilní reprezentace konečné dimenze s nejvyšší vahou τ. Tj. $\bigoplus^k \mathbb{C}^n \subseteq F(\varpi_1)^{\otimes\mu_1} \otimes \ldots \otimes F(\varpi_n)^{\otimes\mu_n}$, tj. s využitím Cartanova součinu: $F(\mu_1\varpi_1) \diamond \ldots \diamond F(\mu_n\varpi_n) \subseteq \bigotimes^k \mathbb{C}^n$. Tj. celkem $F(\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i\varpi_i)$ se nachází v $\bigotimes^k \mathbb{C}$. Nyní stačí užít vztahy z kapitoly 2, tj. $\varpi_i = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_i$, abychom zjistili, že $\mu = \mu_1\epsilon_1 + *(\mu_2\epsilon_1 + \mu_2\epsilon_2) + \ldots + (\mu_n\epsilon_1 + \ldots + \mu_n\epsilon_n) = \sum_{i=1} \lambda_i\epsilon_i$.

Tímto je surjektivita s dokázána. Definujme $\mathfrak{S}_k$-moduly $G^\lambda_{n,k}$ takto: Pro libovolný rozklad $\lambda \in Par(k,n)$ definujme $G^\lambda_{n,k} := V_i$, pokud $s(i) = \lambda$. Definice je oprávněná díky jak injektivnosti, tak i surjektivnosti zobrazení s.

Nyní se snažme ukázat tzv. vlastnost stability. V dalvším uvažujme $G_n \subseteq G_{n+1}$ (standardní vnoření matice $A \in G_n$ jako bloku do matice $((1+n)\times(1+n))$ a na $n+1$vý sloupec a týž řádek umístíme jednotku, 1). Stejně tak si představujeme vnořené maximaální tory a horní trojúhelníkové části, tj. celkem

$$G_n \subseteq G_{n+1}, H_n \subseteq H_{n+1}, H_n \subseteq H_{n+1}.$$

Navíc máme k dispozici standardní vnořen'i $\mathbb{C}^p \subseteq \mathbb{C}^n$ pro $p \leq n$.

Připomeňme, že H_n má akci charakterem $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathbb{Z}^n$ pro $h = diag[h_1, \ldots, h_n] \in H_n$ danou předpisem $h \mapsto h^\lambda = h_1^{\lambda_n} \ldots h_n^{\lambda_n}$.

Navíc víme, že pro $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ a $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k$ platí

$$(\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda) = \mathrm{Span}(\mathrm{e_I}; \mu_\mathrm{I} = \lambda)(\mathrm{JJJ}),$$

kde $e_I = e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ a $\mu_I = \lambda$ značí, že i se vyskytuje v I práě λ_i-krát.

Poznámka 5.4. Uveďme následující užitečné vzorce bez důkazu.

$$\dim G^\lambda = \frac{k!}{\Pi_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}},$$

kde $h_{i,j}$ je takzvaný hák (hook) pozice (i,j), který dosteneme, spočteme-li všechny kostky od pozice (i,j) vpravo vč. kostky odpovídající pozici (i,j) samé a sečteme-li je s počtem kostek pod pozicí (i,j), tentokráte bez kostky odpovídající pozici (i,j) samé. Druhý vzorec umožňuje spočítat dimenzi modulu F^λ.

Obě dvě formule lze klasicky odvodit pomocí úvah o pevných bodech grupové akce a ze znalosti charakterů. Pohodlněji šak pomocí Weylovy formule, které v současné době koncepčně zapadá do teorie kohomologie Lieových algeber, byť ji lze odvodit pomocí Fourierovy analýzy na kompaktních formách, jak to učinil Weyl roku 1925, čímž zobecnil Schurovův výsledek z téhož roku ale jen pro grupu $G = SO(n, \mathbb{C})$.

Po dosazením $\bigotimes^k \mathbb{C}^n$ za V a $\mathrm{L}(\mathrm{G}_n)$ (tj. Lieova algebra od Lieovy grupy G_n) za $\mathfrak{g}$ do předchozí věty dostaneme

$$\bigotimes^k \mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par}(k,n)} \mathrm{F}_n^\lambda \otimes (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)^{\mathcal{N}}(\lambda),$$

kde F_n^λ jsou ireducibilní reprezentace G_n. Ze Schurovi duality máme

$$\bigotimes^k \mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Par}(k,n)} \mathrm{F}_n^\lambda \otimes \mathrm{G}_{k,n}^\lambda,$$

kde $\mathrm{G}_{k,n}^\lambda$ jsou ireducibilní reprezentace $\mathcal{G}_k$. Z toho pak plyne, že $\mathrm{G}_{k,n}^\lambda = (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)^{\mathcal{N}}(\lambda)$. Dále podle lemmatu o vlastnosti stability lze psát $\mathrm{G}_{k,n}^\lambda = \mathrm{G}^\lambda$ a tedy

$$\mathrm{G}^\lambda = (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)^{\mathcal{N}}(\lambda).$$

Každá ireducibilní reprezentace $\mathcal{G}_k$ je ekvivalentní s nějakou G^λ (ještě ozřejmit).

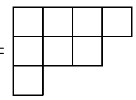
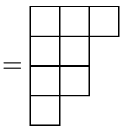
% Toto je text od L. Krizku:

5.2 Youngovy symetrizátory a Weylovy moduly

Libovolnému rozkladu $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0\}$ $(\lambda \in \mathrm{Par}(k,n))$ můžeme přiřadit *Youngův diagram* sestávající z k buněk uspořádaných do řádků délky $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tak, že buňky l-tého řádku leží pod prvními λ_l buňkami $(l-1)$-ho řádku.

Definujeme *duální rozklad* (*transponovaný diagram*) $\lambda^* = \{\lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq \dots\}$ vztahem $\lambda_j^* =$ délka j-tého sloupce diagramu λ.

Jako příklad uvedeme diagram a jeho duální diagram odpovídající rozkladu $\lambda = [4, 3, 1]$.

$\lambda =$  $\lambda^* =$ 

Tabulka A odpovídající diagramu λ je diagram, jehož každá buňka je vyplněna číslem od $1, 2, \dots, k$, přičemž všechna čísla jsou navzájem různá. Označíme A_{ij} číslo, které se v tabulce A nachází v j-té buňce na i-tém řádku tabulky A, pro $i = 1, \dots, p$ a $j = 1, \dots, \lambda_i$.

Symbolem $A(\lambda)$ označíme tabulku, kterou získáme vyplněním buněk postupně odshora dolů a zleva doprava.

Jako příklad uveďme tabulku odpovídají rozkladu $\lambda = [3, 2, 1, 1]$.

$$A(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Množinu všech tabulek odpovídající diagramu λ budeme značit $\mathrm{Tab}(\lambda)$. Na množině $\mathrm{Tab}(\lambda)$ definujeme akci grupy $\mathfrak{S}_k$ vztahem $(s \cdot A)_{ij} = s \cdot A_{ij}$. Každé tabulce A přiřadíme prvek $e_A \in V^{\otimes k}$,tak že $e_A = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, kde $i_j = r$ pokud j se nachází v r-tém řádku tabulky A (e_i je pevně zvolená báze V).

Tedy tenzor přiřazený tabulce z předchozího příkladu bude mít tvar $e_{A(\lambda)} = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_1$.

Pozorování 5.5. $\mathrm{Span}\{e_A; A \in \mathrm{Tab}(\lambda)\} = (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)$.

Důkaz. $(\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda) = \mathrm{Span}\{e_I; \mu_I = \lambda\}$. □

Pozorování 5.6. Pro libovolné $s \in \mathfrak{S}_k$ a $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ platí $\sigma_k(s) e_A = e_{s \cdot A}$.

Tabulka A s r řádky dává rozklad množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ na r disjunktní podmnožin $R_1, \dots, R_r$, kde R_i je množina čísel v i-tém řádku tabulky A. řekneme, že permutace $s \in \mathfrak{S}_k$ zachová řádky tabulky A, pokud s zachovává každou podmnožinu R_i.

Podobně c sloupců tabulky A dává rozklad množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ na c disjunktních podmnožin. řekneme, že permutace $s \in \mathfrak{S}_k$ zachová sloupce tabulky A, pokud s zachovává každou takovou podmnožinu.

Pro libovolnou tabulku A definujeme grupu

$$\mathrm{Row}(A) = \{s \in \mathfrak{S}_k; s \text{ zachovává řádky } A\}$$

a grupu

$$\mathrm{Col}(A) = \{s \in \mathfrak{S}_k; s \text{ zachovává sloupce } A\}.$$

Pozorování 5.7. Pro libovolné $A, B \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ a $s \in \mathfrak{S}_k$ platí:
1) $\mathrm{Row}(A) \cap \mathrm{Col}(A) = \{1\}$,
2) $\sigma_k(s)e_A = e_A$ právě tehdy, když $s \in \mathrm{Row}(A)$,
3) $e_A = e_B$ právě tehdy, když $B = s \cdot A$ pro nějakou permutaci $s \in \mathrm{Row}(A)$.

Definice 5.8. Pro tabulku $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ definujeme *řádkový symetrizátor*

$$\mathfrak{r}(A) = \sum_{r \in \mathrm{Row}(A)} r$$

a *sloupcový symetrizátor*

$$\mathfrak{c}(A) = \sum_{c \in \mathrm{Col}(A)} \mathrm{sgn}(c)c$$

v $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$.

Pozorování 5.9. Nechť $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, pak platí:
1) $\mathfrak{r}(A)x = x\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{r}(A) \quad \text{pro } x \in \mathrm{Row}(A)$,
2) $\mathfrak{c}(A)y = y\mathfrak{c}(A) = \mathrm{sgn}(y)\mathfrak{c}(A) \quad \text{pro } y \in \mathrm{Col}(A)$,
3) $\mathfrak{r}(s \cdot A) = s\mathfrak{r}(A)s^{-1} \quad \text{pro } s \in \mathfrak{S}_k$,
4) $\mathfrak{c}(s \cdot A) = s\mathfrak{c}(A)s^{-1} \quad \text{pro } s \in \mathfrak{S}_k$.

Pozorování 5.10. Nechť $\lambda \in \mathrm{Par}(k, n)$ a $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, pak platí:
1) $\mathfrak{r}(A)[(\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)] \subseteq (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)$,
2) $\mathfrak{c}(A)[(\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)] \subseteq (\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)$.

Lemma 5.11. *Nechť $\lambda \in \mathrm{Par}(k, n)$. Jestliže $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, pak $\mathfrak{c}(A)e_A$ je nenulový N_n-fixní vektor váhy λ.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $A = A(\lambda)$. Nechť λ^* je duální rozklad k λ. Pak $e_A = e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_1^*} \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_{\lambda_2^*} \otimes \cdots \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_q^*}$, kde q je počet řádků v první sloupci A.

Grupa $\mathrm{Col}(A)$ dává všechny možné permutace pozic $1, 2, \dots, \lambda_1^*$; $1, 2, \dots, \lambda_2^*$ až $1, 2, \dots, \lambda_q^*$. Tedy $\mathfrak{c}(A)e_a = \kappa\omega_{\lambda_1^*} \otimes \omega_{\lambda_2^*} \otimes \cdots \otimes \omega_{\lambda_q^*}$, kde $\omega_i = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_i$ a κ je nenulová konstanta. Neboť ω_i je N_n-fixní, tedy i $\mathfrak{c}(A)e_A$ je N_n-fixní vektor.

Nechť A je nyní libovolná tabulka z $\mathrm{Tab}(\lambda)$, pak existuje $s \in \mathfrak{S}_k$, tak že $A = A(\lambda)$. Tedy $e_A = \sigma_k(s)e_{A(\lambda)}$ a $\mathfrak{c}(A) = s\mathfrak{c}(A(\lambda))s^{-1}$.

Odtud plyne $\mathfrak{c}(A)e_A = \sigma_k(s)\mathfrak{c}(A(\lambda))e_{A(\lambda)}$. Akce $\sigma_k(\mathfrak{S}_k)$ komutuje s akcí $\varrho_k(N_n)$, tedy $\mathfrak{c}(A)e_A$ je N_n-fixní vektor.□ □

Lemma 5.12. *Nechť $\lambda, \mu \in \mathrm{Par}(k, n)$ a $k \geq 2$. Dále nechť $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ a $B \in \mathrm{Tab}(\mu)$. Předpokládejme, že buď*

(i) $\lambda <^{\mathrm{lex}} \mu$ *nebo*

(ii) $\lambda = \mu$ *a pro všechna* $c \in \mathrm{Col}(A)$ *a* $r \in \mathrm{Row}(B)$ *platí, že* $c \cdot A \neq r \cdot B$.

Pak existuje dvojice různých čísel l, m, které se nacházejí ve stejném sloupci A a ve stejném řádku B.

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že $\lambda = \mu$. Uvažme pro spor situaci, kdy pro každý řádek B platí, že jsou v něm taková čísla, že žádné dvě z nich se nevyskytují v jendom nějakém sloupci A, tj. všechny se vyskytují v různých sloupcích (žádné dvě "libovolně vysoko nad sebou"). Pak mohu přeuspořádat čísla v sloupcích tabulky A, tj. nechat vzniknout tabulku $c.A$ pro nějaký $c \in Col(A)$ takovou, že každý řádek $c.A$ obsahuje tatáž čísla jako odpovídající (o stejném pořadí v rámci diagramu, partice) řádka B. Nyní ale existuje $r \in Row(B)$, že $r.B = c.A$, což poskytuje spor.

Nyní uvažme, že $\lambda <^{lex} \mu$. Pro $k = 2$ je tvzení zěrjmé. Pědpokládejme, že tvrzení platí pro všechna tableauxa o počtu boxů menším než k. Označme tableau typu μ "maticí" $B = [b_{ij}]_{i,j}$. Nejdříve předpokládejme, že $\lambda_1 < \mu_1$. V tomto případě je dle Dirichletova principu alespoň jedno z λ_1 čísel $b_{1,1}, \dots, b_{1,\mu_1}$ nelze rozřasit do $\lambda_1 < \mu_1$ sloupců, aniž by se alespoň dvě čísla přiřadila nějakému (jednomu) stejnému sloupci. Poslední možností je $\lambda_1 = \mu_1$. Nechť opět pro spor jsou čísla $b_{1,1}, \dots, b_{1,\lambda_1}$ v různých sloupcích. Potom opět existuje $c \in Col(A)$, že $c.A$ ma až na pořadí v 1. rádku tatáž čísla jako jsouv prvním řádku B. Existuje tedy $r \in Row(B)$, že 1. řádky A a B se shodují. Nyní si uvědomme, že z platnosti lemmatu pro $c.A$ a $r.B$ plyne platnost pro A a B. Tomu je tak, neboť pokud jsou dvě čísla $\{l, m\}$ v témže (t. tém) sloupci $c.A$ jako v nějakém (s. tḿ) řádku $r.B$, jsou tato čísla v t. tém řádku A a v s. tém sloupci B. (Z odůvodnění plyne, že implikaci lze obrátit.) Proto stačí tvzení dokázat pro $c.A$ a $r.B$. Odstraňme 1. řádek jak A, tak i B. Dostaneme tableauxa o méňe než k boxech a užiejem indukčního předpokladu (nevadí, že zbylá č)ísla nemusí být z nějaké množiny $\{1, \dots, k - \lambda_1\}$ - lze je totiž přeznačit a pak přeznačit zpět.) □

Důsledek 5.13. *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Pak existuje $\gamma \in \mathrm{Col}(A) \cap \mathrm{Row}(B)$, že $\gamma^2 = 1$ a $\mathrm{sgn}(\gamma) = -1$.*

Důkaz. Dle předchozí věty existují různá čísla l, m, která jsou ve stejném sloupci A a stejném řádku B. Permutaci $\gamma \in \mathfrak{S}_k$ tedy definujeme jako transpozici l a m. $\square$

Věta 5.14. *Nechť $\lambda \in \mathrm{Par}(k, n)$. Pak platí:*
1) jestliže $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, pak $\mathfrak{c}(A)[(\bigotimes^k \mathbb{C}^n)(\lambda)] = \mathbb{C}\mathfrak{c}(A)e_A$,
2) $G^\lambda = \sum_{A \in \mathrm{Tab}(\lambda)} \mathbb{C}\mathfrak{c}(A)e_A$.

Důkaz. (1): Stačí spočítat akci $\mathfrak{c}(A)$ na vektorech e_B, kde $B \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, neboť tvoří bázi $(\bigotimes^k (C)^n)(\lambda)$. Pokud existují permutace $c \in \mathrm{Col}(A)$ a $r \in \mathrm{Row}(B)$, že platí $c \cdot A = r \cdot B$, pak $\mathfrak{c}(A)e_B = \mathfrak{c}(A)e_{r \cdot B} = \mathfrak{c}(A)e_{c \cdot A}$. Dále $\mathfrak{c}(A)e_{c \cdot A} = \mathfrak{c}(A)\sigma_k(c)e_A = \mathrm{sgn}(c)\mathfrak{c}(A)e_A$ (užili jsme 4.7.2 a 4.9.2), tedy platí tvrzení.

Pokud takové permutace r, c neexistují, pak podle předchozí věty existuje $\gamma \in \mathrm{Col}(A) \cap \mathrm{Row}(B)$, že $\gamma^2 = 1$ a $\mathrm{sgn}(\gamma) = -1$. Máme $\mathfrak{c}(A)e_B = \mathfrak{c}(A)e_{\gamma \cdot B} = \mathfrak{c}(A)\sigma_k(\gamma)e_B = -\mathfrak{c}(A)e_B$, tedy $\mathfrak{c}(A)e_B = 0$.

(2): Jelikož dle lemmatu víme, že pravá strana sestává z N_n-fixních vektorů váhy λ a levá strana je tak definovaná, a proto pravá je obsažena v levé. Ukážeme, že pravá strana je $\mathfrak{S}_k$-invariantní. Navíc pro $s \in \mathfrak{S}_k$ a $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ máme $\sigma_k(s)\mathfrak{c}(A)e_A = \sigma_k(s)\mathfrak{c}(A)\sigma_k(s)^{-1}\sigma_k(s)e_A = \mathfrak{c}(s.A)e_{s.A}$, a tedy pravá strana (2) je invariantní vůči akci $\mathfrak{S}_k$. Jelikož G^λ je ireducibilní $\mathfrak{S}_k$-modul, platí rovnost v (2). $\square$

% **Odtud je to text od Martina:**

Věta 5.15. *Pokud $\mu \in \mathrm{Par}(k), \lambda \in \mathrm{Par}(k, n), A \in \mathrm{Tab}(\lambda), S(A) := c(A)r(A)$. Potom*

(1) $S(A)G^\mu = 0$, pokud $\mu \neq \lambda$ a

(2) $S(A)G^\mu = \mathbb{C}c(A)e_A$, pokud $\mu = \lambda$.

Důkaz.

(1) Nejdříve dokažme první část.

(1.1) Nejprve předpokládejme, že $\mu \overset{lex}{>} \lambda$. Stačí spočítat $c(A)r(A)\bigotimes^k \mathbb{C}^n(\mu)$. Víme (viz 4.10.1), že $r(A)\bigotimes^k \mathbb{C}^n(\mu) \subseteq \bigotimes^k \mathbb{C}^n(\mu)$, tj. stačí spočítat $c(A)\bigotimes^k \mathbb{C}^n(\mu)$. Zřejmě jsou splněny přespoklady důsledku 4.13, tj. existuje transpozice $\gamma \in Col(A) \cap Row(B)$, pro kterou můžeme můžeme psát $c(A)e_B = c(A)e_{\gamma.B} = c(A)\sigma_k(\gamma)e_B = -c(A)e_B$, tj. $c(A)e_B = 0$

(1.2) Zde je $\mu \overset{lex}{<} \lambda$, tj. existuje transpozice $\gamma \in Col(B) \cap Row(A)$ (všimněte si, že se role A a B vyměnily). Chceme působit $s(A) = c(A)r(A)$ na elementy G^μ, tj. dle předchozí věty na elementy $c(B)e_B$, kde $B \in Tab(\mu)$. Zapůsobíme-li jen $r(A)$, dostaneme $r(A)c(B)e_B = r(A)\gamma^2 c(B)e_B = -r(A)c(B)e_B$, tj. opět nulu. Poznemenejme jen, že jsme použili pozorování 4.9.1 a 4.9.2.

(2) Stejně jako v předchozím případě $G^\lambda \subseteq (\otimes^k \mathbb{C}^k)(\lambda)$, $(\otimes^k \mathbb{C}^k)(\lambda) = \mathrm{Span}\{e_B; B \in \mathrm{Tab}(\lambda)\}$ a navíc $c(A)r(A)(\otimes^k \mathbb{C}^k)(\lambda) \subseteq c(A)(\otimes^k \mathbb{C}^k)(\lambda) = \mathbb{C}c(A)e_A$, tj. jedna inluze je dokázána. Nechť je i pro $\mu = \lambda$ $s(A)G^\mu = 0$. Jelikož je $\bigotimes^k \mathbb{C}$ sumou G^λ (nikoliv bez multiplicit, tj. kopie G^λ se mohou opakovat!), bylo by $s(A) \bigotimes^k \mathbb{C} = 0$, což je ve sporu, že např. $c(A)r(A)e_A = kc(A)e_A$, kde $k \in \mathbb{N}$, což je však nenulový vektor - viz lemma 4.11.

$\square$

5.3 Weylovy moduly

Pozorování 5.16. Zvolíme dostatečně velké n k pevnému k (stačí $n \geq k$), potom dostaneme všechny reprezentace $\mathfrak{S}_k$.

Definice 5.17. Vyhradíme symbol pro nasledující $\mathfrak{S}_k$-modul definovaný předpisem $\mathcal{E}_k := (\otimes^k \mathbb{C}^k)^{N_k}$.

Pozorování 5.18. Platí $\mathcal{E}_k = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Par}(k)} G^\lambda$. Jelikož $\{G^{\lambda; \lambda \in Par(k)}\}$ je množina všech neekvivalentních ireducibilních reprezentací $\mathfrak{S}_k$ (viz důkaz Schurovy duality, přesposeldní vztah před kap. 4.2 pro $k = n$ a užití věty o dvojitém komutantu spolu s důsledkem 3.14), tj. i polojednoduché (neboť platí věta 1.44) asociativní algebry $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ (viz větu), je dle věty 3.8, popř. 1.38

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \simeq \oplus_{\lambda \in \mathrm{Par}(k)} \mathrm{End}(G^\lambda).$$

Definice 5.19. Symbolem $\mathfrak{B}^\lambda$ označme oboustranný ideál v $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ odpovídající ideálu (podalgebře) $\mathrm{End}(G^\lambda)$ v předchozím izomorfizmu.

Lemma 5.20. *Pro každou partici $\lambda \in \mathrm{Par}(k)$ a každé Youngovo tableau $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ je $S(A) \in \mathfrak{B}^\lambda$. Navíc existuje $\zeta_\lambda \neq 0 :\; S^2(A) = \zeta_\lambda S(A)$, tj. $S(A)$ je až na násobek idempotent.*

Poznámka 5.21. Z nenormalizovaného Youngova symetrizátoru uděláme (normalizovaný) Youngův symetrizátor, jakmile budeme znát normalizační konstantu.

Důkaz. V první části důkazu ukážeme, že $S(A) \in \mathfrak{B}^\lambda$. Pro $x \in G^\lambda$ platí $S(A)x = f_A(x)c(A)e_A$, což víme z předchozí věty (4.15), kde $f_A : G^\lambda \to \mathbb{C}$. Obecněji pro $x \in \mathcal{E}_k = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Par}(k)} G^\lambda$ platí analogicky $S(A)x = f_A(x)c(A)e_A$, kde $f_A : \mathcal{E}_k \to \mathbb{C}$. Protože $c(A)e_A \in G^\lambda$ (viz větu 4.14.2), je $S(A) \in \mathfrak{B}^\lambda$, neboť $S(A)$ působí tak, že posílá všechny elementy do G^λ. Označme $S(A)c(A)e_A = \zeta_A c(A)e_A$ neboli $f_A(c(A)e_A) =: \zeta_A$.
$S^2(A)x = S(A)S(A)x = f_A(x)S(A)c(A)e_A = f_A(x)\zeta_A c(A)e_A = \zeta_A S(A)x$
Protože reprezentace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ je věrná, dostáváme $S^2(A) = \zeta_A S(A)$. Nyní zvolme nějaké $B \in \mathrm{Tab}(\lambda)$. Jistě existuje $\gamma \in \mathfrak{S}_k$, že $B = \gamma \cdot A$, a proto $S^2(B) = S(B)S(B) = \gamma S^2(A)\gamma^{-1} = \gamma\zeta_A S(A)\gamma^{-1} = \zeta_A S(B$, odkud plyne, že $\zeta_A = \zeta_B$, a tedy lze definovat ζ_λ, které nezávisí na vyplnění ($\mathrm{Tab}(\lambda)$). $\zeta_\lambda =\neq 0$, neboť, pak by $S(A)G^\lambda = 0$, což je spor s větou □

Poznámka 5.22. Uvažme $(L, \mathfrak{A})$, levou reprezentaci algebry $\mathfrak{A}$ na sobě: $L(a)x = ax \ \forall a \in \mathfrak{A}$. Pro každé $a \in \operatorname{Ker} L$ platí $0 = L(a)x = xa$, speciálně $x = 1 : L(a) = a = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} L = 0$, čili levá reprezentace je věrná.

Definice 5.23. Nechť L je levá regulární reprezentace $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$
$p_A := \zeta_\lambda^{-1} S(A)$ nazveme Youngův normalizovaný symetrizátor pro $A \in Tab(\lambda)$.

Pozorování 5.24. $p_A^2 = \zeta_\lambda^{-2} S^2(A) = \zeta_\lambda^{-1} S(A) = p(A)$, čili je to idempotent v $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$ s obrazem $S(A)\,\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$. Odtud $\mathrm{Tr}(L(p_A) = \dim(S(A)\,\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k])$

Věta 5.25. *Nechť* $\lambda \in \mathrm{Par}(k)$. *Pak* $\zeta_\lambda = \dfrac{k!}{\dim G^\lambda}$.

Důkaz. Napišme p_A v bázi $\{g\}_{g \in \mathfrak{S}_k} =: \Xi$ grupové algebry.

$$p_A = \sum_{g \in \mathfrak{S}_k} a_g g$$

, $a_g \in \mathbb{C}$.

Nyní napišme matici $L(p_A)$ v bázi Ξ, jakožto endomorfizmu na $\mathfrak{S}\neg$. Nechť $h \in \Xi$, potom $L(p_A)h = (\sum_{g \in \mathfrak{S}_k} a_g g)h = \sum_{g \in \mathfrak{S}_k} a_g gh$ Použitím substituce $g' = gh$ dostaneme $\sum_{g' \in \mathfrak{S}_k} a_{g'h^{-1}} g'$ □

$,odkusplyne, ematice$L(p$_A$) vůči Ξ je

$$[a_{gh^{-1}}]_{h \in \mathfrak{S}_k}^{g \in \mathfrak{S}_k}.$$

Odtud snadno $\mathrm{Tr}\, L(p_A) = a_1|\mathfrak{S}_k| = k!a_1$. Jelikož a_1 je koeficient u jednotkové permutace, je roven ζ_A^{-1} vzhledem k definici p_A pomocí $s(A)$ a tomu, že u jednotky je v $s(A) = c(A)r(A)$ koeficient 1.

Protože $S(A) \in \mathfrak{B}^\lambda$, je $S(A)\,\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] \simeq S(A)\mathfrak{B}^\lambda$. Označme $\{f_i\}$ b'azi G^λ takovou, že $f_1 = c(A)e_A$. Je $s(A)x = f(A)c(A)e_A = kf_1$, jak jsme definovali v důkazu předchozího tvrzení. Tedy $s(A)\mathfrak{B}^\lambda$ dle izomorfizmu výše odpovídá $E_{11}End(G^\lambda) \simeq G^\lambda$, kde E_{11} je matice s jednotkou na pozici 11 a s nulami jinde (vůči bázi $\{f_i\}$.) Dohromady tedy $k!\zeta_\lambda^{-1} = \mathrm{Tr}(L(p_A)) = \dim S(A)\,\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k] = \dim G^\lambda \;\Rightarrow\; \zeta_\lambda = \dfrac{k!}{\dim G^\lambda}$, což lze upravit pomocí hákové formule, viz poznamku 4.4.

Věta 5.26. *Nechť $A \in \mathrm{Tab}(\lambda)$. Potom p_A projektuje $\otimes^k\mathbb{C}^n$ na (nějakou kopii) F_n^λ, jakožto ireducibilního* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$*-modulu s nejvyšší vahou λ.*

Důkaz. Díky Schurově dualiě je $\otimes^k\mathbb{C}^n \simeq \oplus_{\lambda\in\mathrm{Par}(k,n)} (F_n^\lambda \otimes G^\lambda)$ □

jako$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathfrak{S}_k$-modul. $p_A(\otimes^k\mathbb{C}^n) = \oplus_{\lambda'\in\mathrm{Par}(k,n)} F_n^{\lambda'} \otimes p_A G^{\lambda'} = F_n^\lambda \otimes \mathbb{C}c(A)e_A \simeq F_n^\lambda$. Idempotent p_A působí na F_n^λ triviálně, neboť je z $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$. Použili jsme větu 4.15.2. Fakt tvrdící, že p_A projektuje jsme dokázali v poznámce 4.24 - opřené o větu 4.23.

5.4 Standardní tableaux

Definice 5.27. Následující množinu

$$STab(\lambda) = \{A \in Tab(\lambda)\,;\text{čísla v řádcích a sloupcích rostou}\}$$

nazveme množinou *standardních tableaux.*

Příklad 5.28. $\left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = \mathrm{STab}(2,1)$

Příklad 5.29. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \overset{lex}{<} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$

Následující věta popisuje bázi prostoru G^λ. Dokážeme jen lineární nezávislost příslušného systému. Generaci lze dokázat užitím indukce a větvicích pravidel, která nespadají do tohoto základního kurzu.

Věta 5.30. $\{S(A)e_A; A \in \mathrm{STab}(\lambda)\}$ *je báze* G^λ.

Lemma 5.31. $A, A' \in \mathrm{STab}(\lambda), A' \overset{lex}{>} A :\; S(A')S(A) = 0$

Důkaz. Lineární nezávislost: Nechť $\sum\limits_{A\in\mathrm{STab}(\lambda)} b_A S(A)e_A = 0$, kde $b_A \neq 0$.

Označme $A' = \min\mathrm{lex}\{A, A \in \mathrm{STab}(\lambda)\}$, potom

$S(A') \sum_{A\in \mathrm{STab}(\lambda)} b_A S(A) e_A = 0 \overset{lemma}{\Rightarrow}$
$b_{A'} S^2(A') e_{A'} = 0 \Rightarrow b_{A'} \zeta_\lambda S(A') e_{A'} = 0 \Rightarrow b_{A'} = 0$, neb $\zeta_\lambda \neq 0$ a $S(A') e_{A'} \neq 0$. $\square$

Příklad 5.32. $A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$, $B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 3 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array}$. Potom
$e_A = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 \otimes e_3, e_B = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_1$

Poznámka 5.33. Všimněte si, že jsme dostali úplný popis ireducibilnícj $\mathfrak{S}_k$-modulů (pomocí báze), tak $GL(n, \mathbb{C})$-modulů - pomocí projekce. Akce na těchto podmodulech je "restrikcí" tenzorových reprezentací σ_k a ρ_k.

Příklad 5.34. Uvažte $\lambda = (2, 2)$ (tzv. *Youngova tabulka Riemannova tenzoru*).

- akci $\mathfrak{S}_k$ na G^λ (resp. na bázi)
- dimenzi G^λ, charakterovou tabulku G^λ - bez Murnaghan-Nakayamových pravidel
- jak působí matice $A = (2, 1; 1, 2)$ na F_n^λ?
- charakteristiku tenzorů z F_n^λ
- umíte dokázat, že předechozí caharteristika je ekvivalentní s popisem tzv. algebraického
- dimenzi F_n^λ. specifikujte pro OTR, tj. $n = 4$. Koresponduje výsledek se známým faktem z OTR o počtu stupňů volnosti Riemannova teznoru?

5.5 Projekce na izotypické komponenty

V následující větách popíšeme proketory na izotypické komponenty prostoru $\otimes^k \mathbb{C}^n$ jak jako $GL(n, \mathbb{C})$-modulu, tak jako $\mathfrak{S}_k$-modulu.

Věta 5.35. *(1) F je invariantní podprostor v $\otimes^k \mathbb{C}^n$ vůči* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. *Pak $P_\lambda F$ je izotypická komponenta typu F_n^λ v F.*
(2) G je invariantní podprostor v $\otimes^k \mathbb{C}^n$ vůči $\mathfrak{S}_k$. Pak $P_\lambda G$ je izotypická komponenta typu G^λ v G.

Důkaz. (1) $\otimes^k \mathbb{C}^n = \oplus_{\lambda' \in \mathrm{Par}(k,n)} F_n^{\lambda'} \otimes G^{\lambda'}$
$P_\lambda F = F_n^\lambda \otimes U^{\lambda,n}$, kde $U^{\lambda,n} \overset{V.P.}{\equiv} c_{k_1} \oplus ... \oplus c_{k_m}; m \leq \dim G^\lambda$
(2) analogicky $\square$

Definice 5.36. $P_\lambda := (\frac{\dim G^\lambda}{k!})^2 \sum_{A \in \mathrm{Tab}(\lambda)} S(A)$, kde $\lambda \in \mathrm{Par}(k, n)$

Lemma 5.37. $\{P_\lambda\}_{\lambda\in \mathrm{Par}(k,n)}$ *je sada minimálních centrálních idempotentů pro* $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$

Důkaz. Triviální. Až na násobek $P_\lambda^2 = A_\lambda P_\lambda$ □

6 Schurovy relace ortogonality, příklady a aplikace ve spektroskopii.

6.1 Relace ortogonality

Odvoďme nyní tzv. první Schurovy relace ortogonality - jiný způsob spočívá v uplatnění Fourierovy transformace, jak jsme provedli na přednášce. Náš způsob bude víceméně klasický - bude kopírovat Schurovu dizertaci z roku 1905.

Lemma 6.1. *Nechť* ρ, σ *jsou reprezentace* G *na* V *a* W *a* $S_0 \in Hom(V,W)$,

$$S := \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \rho(a) S_0 \sigma(a)^{-1}.$$

Potom

(1) $\rho \neq \sigma$ *implikuje* $S = 0$,

(2) $\rho \simeq \sigma$ *implikuje* $S = \frac{1}{n} tr S_0$.

Důkaz. Snadno zjistíte, že $S \in Hom_G(V,W)$. Tj. první část je důsledkem první části Schurova lemmat; druhá důsledkem druhé, uvážíme-li, že $trS = trS_0$. □

Zapišme výsledek předchozího lemmatu v maticové formě. Pokud $\rho \neq \sigma$, je

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \sigma_{kl}(a)\rho_{ij}(a^{-1}) = 0.$$

Jinak

$$\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \sigma_{kl}(a)\rho_{ij}(a^{-1}) = (1/n)\delta_{li}\delta_{kj}.$$

Připomeňme, že pro konečné případně kompaktní grupy je možné zavést G-invariantní skalární součin, že každá konečně dimenzionální reprezentace se stane unitární vůči tomutu sk. součinu, a proto je možno psát $\rho(a)^{-1}_{ij} = \overline{\rho(a)_{ji}}$. Zavedeme-li skalární součin pro funkce definovaná na G takto

$(f_i, f_j) := \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f_1(a)\overline{f_2(a)}$, je možné psát $(\rho_{kl}, \sigma_{ij}) = (1/n)\delta_{ki}\delta_{lj}$.

Speciálně pro charakter $\chi : G \to \mathbb{C}$ platí, že $\chi(a)^{-1} = \overline{\chi(a)}$, tj. $\chi(a)\overline{\chi(a)} = 1$, tj. χ je homomorfizmus mezi G a kružni¸i (1-torem) $U(1)$.

Pro charaktery χ^1, χ^2 reprezentací ρ, σ spc. dostáváme, že $\rho \neq \sigma$ implikuje $(\chi^1, \chi^2) = 0$ a rho ireducibilní implikuje $(\chi^1, \chi^1) = 1$.

Nechť $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ je rozklad V na ireducibilní sumandy. Je zřejmě

$\phi = \chi_1 \oplus \ldots \oplus \chi_k$, kde ϕ je charakter V a χ_i jsou charaktery ireducibilních sumandů. Z předchozího plyne, že (ϕ, χ) je počet výskytů χ v V. Odtud spc. plyne, že charakter určuje ireducibilní reprezentaci.

Uvažujeme-li vektorový prostor všech centrálních funkcí, dostaneme, že

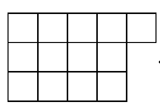
6.2 Příklady: Murnagham-Nakaymova a Littelwood-Richardsonova pravidla.

Typickým příkladem je explicitní popis reprezentací F_n^λ a G^λ pomocí hákových vzorců, popis tenzorů z F^λ a báze G^λ. Ve zkouškové písemce bude takový příklad.

Dalším možným příkladem je určení charakterové tabulky pro nějakou symetrickou grupu, popř. její podgrupu.

Za tímto účelem se zmíníme bez důkazu o tzv. *Murnaghan-Nakayamových pravidlech*, což jsou kombinatorická pravidla, pomocí nichž lze počítat hodnoty charakterů na dané třídě symetrické grupy $\mathfrak{S}_n$.

Uvažme nějakou reprezentaci G^λ danou Youngovým diagramem $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Vezměme konkrétní diagram. Např $\lambda =$ . Počítáme-li hodnotu $\chi^{(4,4,3)}(C)$ charakteru na konjugační třídě $C = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, zajímáme se o tzv. antiháky delky . *Antihák* je část (pravého a dolního) okraje příslušného Youngova diagramu takový, že po jeho vynechání vznikne opět (nějaký Youngův diagram). Tzv. *nožní délka* antiháku je přirozené číslo $l = i - j$, kde i je číslo řadku konce antiháku a j je číslo řádku jeho začátku. Platí induktivní vzorec pro $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$

$$\chi^\lambda(\mu) = \sum_{\lambda'} (-1)^l \chi^{\lambda'}(\overline{\mu}),$$

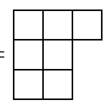
kde $\mu = (\mu_2, \ldots, \mu_p)$ a sčítá se přes všechny antiháky délky a λ' je Youngův diagram vzniklý odtrsněním přísl. antiháku.

Antihák budeme zapisovat pomocí uspořádané množiny. Středníkem budeme oddělovat jednotlivé řádky antiháku a mezi středníky se budou vyskytovat čislující sloupce daného řadku patřící k danému antiháku - píšeme nulu, pokud žádny box v daném řádku (ne)patří k antiháku.

Počítejme $\chi^{(5,5,4)}(5,4,3,1)$. Antiháky dély 5 jsou pouze dva: $(4,5;4;3,4)$ a $(0;4,1,2,3,4)$. (Kreselte si obrázky.) Jejich vynecháním vzniknou Youngovy diagramy $(3,3,2)$ a $(5,3)$. Je tedy

$$\chi^{(5,4,4)}(5,4,3,2) = \chi^{3,3,2}(4,3,1) - \chi^{5,3}(4,3,1).$$

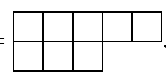
Zkoumejme 1. z charakterů. V Youngově diagramu

$\lambda =$ 

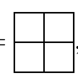
jsou jen dva 4-antiháky: $(3;2,3;2)$ a $(0;2,3;1,2)$,

$$\chi^{(3,3,2)}(4,3,1) = \chi^{(2,1,1)}(3,1) - \chi^{(3,1)}(3,1).$$

Nyní zkoumejme druhý charakter $\chi^{(5,3)}(4,3,1)$ tj. pro

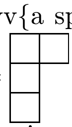
$\lambda =$ .

Tento má pouze jeden 4-antihák, a to $(3,4,5;3)$. Jeho vynecháním vznikne Youngův diagram

$\lambda =$ ,

"*diagram Riemannova tenzoru*". Tj.

$$\chi^{5,3}(4,3,1) = \chi^{2,2}(3,1).$$

Zbýv{a spočítat charaktery $\chi^{2,1,1}(3,1), \chi^{3,1}(3,1), \chi^{2,2}(3,1)$. Youngův diagram $\lambda =$  nemá žádný 3-antihák. Uvážením "antiháku" $(1,2;1;0)$, vznikne diagram jen o jednom boxu v třetí řádce, který však není přípustný, neboť je typu $(0,0,1)$; zde Mutnaghan-Nakayamova pravidla poskytnou kanonicky nulu, tj.

$$\chi^{2,2,1}(3,1) = 0.$$

Totéž platí pro $\chi^{3,1}(3,1)$, tj.

$$\chi^{3,1}(3,1) = 0.$$

Zbývá spočítat $\chi^{2,2}(3,1)$. Antihák délky 3 je $(2;1,2)$, po jehož vynechání vznikne admisibilní Youngův diagram $(1,0)$ a platí

$$\chi^{2,2}(3,1) = \chi^{1}(1),$$

což je dimenze (- vyčíslujeme na identitě) triviální (horní jednička) reprezentace, tj. $\chi^{2,2}(3,1) = 1$.

Celkem $\chi^{5,4,4}(5,4,3,1)$.

Příklad 6.2. Zjistěte charakterovou tabulku reprezentace $\mathfrak{S}_4$. Viz aplikace na spektum tetrachlormethanu.

Nyní se zabývejme tzv. Littelwood-Richardsonovými pravidly pro násobení reprezentací obecné lineární grupy. Lze je dovodit uvážení větvicích pravidel pro subdukci na symetrické grupě detilními kombinatorickými pravidly - zájmce odkazuji na příslušnou literaturu. Poznamenejme ještě, že ve fyzice se tento problém (dekompozice tenzorových součinů) nazývá *Clebsch-Gordanův problém* a dodnes je jedním ze základních přetrvávajích problémů teorie reprezentací - byť v současnosti pro nekonečně dimensionální rperzentace nekompaktních Lieových grup.[2]

6.3 Aplikace: absorpční spektroskopie.

Čtenář znalý alepsoň základů spektroskpie jistě ví, že některé prostorově možné vibrační módy molekul nejsou v jejich infračervených spektrech pozorované - neprojeví se absorpční čarou. Pravidla určující tzv. zakázané přechody jsou ve spektroskopii známé jako *selekční pravidla.* [3] Tato pravidla lze celkem snadno odvodit pomocí reprezentací podgrup symetrické grupy, které jsme zkoumali pomocí teorie nejvyšší váhy pro reprezentace obecné lineární grupy, které spolu souvisí, jak jsem zjistili, na základě Schurovy duality.

Pro ve spektroskpii neerudovaného čtenáře připomeňme, že experimentálně tato analytická metoda spočívá v ozařování látky vzorku infračerveným světlem, které je emitováno zahřátým (ideálně absolutně černým) tělesem. Část takového záření je pohlcováno vzorkem a kvantitativně lze popsat kvantovou mechanikou.

Hovoříme o *absorpční spektroskopii*, pokud měříme právě záření pohlcené. Osvicujeme-li (často atomární látku) zářením, které je schono energeticky excitovat elektrony obalu přísl. látky a ta pak vyzařováním fotonu při deexcitaci

[2] Ve fyzice je známo tzv. skládání spinu: $V_2 \otimes V_r = V_{|r-s|} \oplus \ldots \oplus V_{r+s}$, je tomu tak pro to, že $SU(2)$ je reálnou formou $SL(2,\mathbb{C})$.

[3] Další slavná pravidla, tentokráte z kvantové chemie, jsou tzv. Hundova vylučovací pravidla a lze je také "odvodit" pomocí reprezentací zde kompaktních Lieových grup: $SU(2)$ a $SO(3,\mathbb{R})$.

elektronů např. do základního stavu svítit - emitovat záření, mluvíme o *spektorskopii emisní.*

My se budeme zabývat absorpční spektroskopií; vzorkem bude monomolekulární látka (pro představu v kapalném stavu). Zářením je realizované proudem fotonů emitovaných absolutně černým tělesem. Látku uvažujeme být o pokojové teplotě. Na základě semiklasické teorie si představujeme, že látka může jistým způsobem vibrovat a pokud světlo má danou vibrační frekvenci, dojde k jeho absorpci - světlo je využito pro kmityatomů v molekule. Připomínám, že tento popis je velmi naivní - zájemce je odkázán na přísl. pasáže o tzv. perturbačních aproximativních metodách semiklasické nerelativistické kvantové mechaniky (semiklasické, neboť se nejedná o teorii pole, byť studovaný objekt do interakce s polem přichází).

V aproximačních metodách kvantové relativistické i nerelativistické mehaniky hrají důležitou roli tzv. tenzorové operátory, jedná se o G-homomorfizmy

$$R : V \to Aut(\mathcal{H}),$$

kde V je obvykle prostor, v němž se uvažovaný systém nachází a vněmž jsou realizovanány jeho vnitřní vibrace, $\mathcal{H}$ je separabilní Hilbertův prostor přiřazený studovanému systému (nezahrnuje přítomnost světla) a G je grupa symetrie systému - grupa, vůči jejíž regulární akci je invariantní hamiltonián systému.

Postupujme čistě utilitaristicky. U nás bude vždy $V = \mathbb{R}^3$ jako vektorový prostor. Popišme jeho strukturu jako modulu nad konečnou grupou G. Za vhodných okolností bude vhodné uvažovat G podgrupou $O(3, \mathbb{R})$. Struktura V jako G-modulu je dána restrikcí definující reprezentace grupy $O(3, \mathbb{R})$ na grupu G. Stručně se zmiňme o výběru grupy G. Když jsme se již rozhodli pro podgrupy ortogonální grupy, je metoda nalezení G celkem algoritmická. Zvolíme libovolnou diskrétní podgrupu $O(3, \mathbb{R})$ - připomeňme, vze jich je pouze 5 typů $(C_n, D_k, T \simeq \mathfrak{A}_4, O \simeq \mathfrak{S}_4, I)$ takovou, aby jednak její std. reprezentace působila na molekulu tak, aby zaměnila je ty atomy, které jsou shodné co do typu (tj. elektronového čísla - já)dra, neutronů, si nevšímáme), jednak neexistovala větší grupa, která dělá totéž.

Zmiňme se o diskrétních podgrupách $SO(3, \mathbb{R})$. Jak jsme již uvedli, jedná se o cyklické (abelovské) grupy C_n o počtu prvků n, dihedrální T symetrií tetrahedronu o 12 prvcích, grupa O symetrií oktaedru o 24 prvcích a 60prvková grupa I symetrií ikosahedru.

Klasickým příkladem je molekula tetrachlormethanu CCl_4. Chlorové atomy jsou umístěny (viz MO method) ve vrcholech čtyřstěnu a atom uhlíku v jeho geometrickém středu. Za G volíme grupu T - přímé symetrie tetraedru. Spočtěme charakterovou tabulku tetraedrové grupy, připomeňme, že $|T| = |\mathfrak{A}_5| = 6!/2 = 12$, jak vyplyne i z dalšího.

Nejdříve popišme strukturu tetraedrální grupy co do konjugačních tříd. Je zřejmě, že grupa obsahuje identitu e, která je jediným prvkem své konjugační třídy, máme tedy třídu $[e]$.

Konjugační třída obsahující rotaci o $2\pi/3$ v podstavě tetraedru má čtyři prvky odpovídající atomům chloru, které jsou fixovány.

Další konjugační třídou jsou rotace o $4/\pi 3$ - opět 4.

Poslední konjugační třídu $[s_4]$ tvoří rotace o π kolem osy, která prochází středy mimoběžných hran tetraedru. Takových dvojic hran jsou 3=6/2.

Schematicky píšeme $T = [e], 3[r_3], 3[r_3^2], 3[r_2]$.

Protože z kvantové mechaniky záření neplynou restrikce na inverzi prostorvé orientace, měli bychom T obohatit o reflexe podle nadrovin. Získáme tak grupu T_d, kterou lze vizualizovat např. pomocí symetrie krychle rozdělené do dvou čtyřstěnů, anebo jednodušeji pomocí symetrií tetrahedronu samého.

T_d jistě obsahuje $[e]$. Dále pak obsahuje i 4 rotace $[r_3] = \{(123), (124), (134), (2, 3, 4)\}$. Rotace r_3^2 jsou však k předchozím konjugovány, neboť např. rotace podél osy kolmé na rovinu 123 procházející 4 o $4\pi/3$ je konjugovaná k rotaci kolem téže osy o úhel $2\pi/3$, a to pomocí reflexe vůči rovině procházející hranou 34 a půlící hranu 12 (stěnu 124). Tj. konjugační třída má 8 prvků.

Třída s_4 zůstává - má 3 elementy.

Další samostatnou třídou jsou reflexe podél nadrovin procházející nějakou hranou a půlící prtilehlou stěnu tetraedru - je jich šest jako hran čtyřstěnu.

Zbývá 6 prvků. Jelikož se jedná o nepřímé shodnosti, lze je složit z rotace a reflexe. Tak např. permutaci (1243) dostaneme složením rotace r_2 kolem osy $s(12)s(34)$ (kde s značí střes strany) složené s reflexí kolem nadroviny půlící stěnu 234 a procházející hranou 14. Další 4-cyklus z této rotace vznikne uvážením reflexe podle nadroviny procházející hranou 23 a půlící stěnu 134, a proto počet prvků této konjugační třídy je $2.3 = 6$.

Zkonstruovali jsme tak homomorfizmus $T do S_4$. Jelikož vzorem $e \in S_4$ je jedině $e \in T_d$, jedná se o monomorfizmus. Jelikož $|\mathfrak{S}_4| = 24 = |T_d|$, jde o izomorfizmus.

Pro výpočet charakterů můžeme tedy používat Murnaghan-Nakayamova pravidla.

Jejich užitím dostaneme, viz úlohu v předchozí podkapitole.

Konjugační třída $[\tau_d]$ obsahující reflexi podél roviny procházející nějakým atomem chloru půlící protilehlou stranu má 6 prvků, neboť reflexe jsou v bijecki se středy hran, kterých je šest, tj. $|[\tau_d]| = 6$.

Dalším elementem je rotace r_3 o úhel $2\pi/3$, při ketré je fixován jeden vrchol a zbyl'e tři jsou permutovány (cyklicky posunuty). Fixovat mohu celkem čtyři vrcholy; přidáním minus identity dostaneme 8 elementů - $|[r_3]| = 8$. Dalším zobrazením je rotaca o π kolem osy, která prochází středem jedné hrany a středem hrany, která s předchozí je mimoběžná - takovýchto rotací je 3. Posledním je permutace typu (1234), kde jsme atomy chloru očšslovali $1, 2, 3, 4$. Geometricky se jedná o

Dle předchozí teorie, viz větu XXX, existuje pět ireducibilních neekvivalentních reprezentací grupy T_d. Tři z nich jsou snadné určit. χ_1 označme triviální; χ_3 znaménkovou; χ_5 definující jako restrikci std. reprezentace $O(3, \mathbb{R})$ na T_d. Jelikož víme, že

$$24 = |G| = 1^2 + d_2^2 + 1^2 + d_4^2 + 3^2,$$

je zřejmě $d_2 = 2$ a $d_4 = 3$. Jelikož víme, že reprezentace χ_5 určuje i reprezentaci $\wedge^2\chi_5$ také dimenze 3, je χ_4 vhodným kandidátem. Nevíme, však mnoho ani o ireducibilitě $\wedge^2\chi_5$, ani to, zda je izomorfní χ_5.