

2. Cvičení

1. Určete součet následujících řad.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right] \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)} \quad , \quad -z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$$

2. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} & \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) 5^n}{2^n 3^{n+1}} & \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n - 2n^n} & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} & \text{f) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} & \text{g) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^k} & , \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

3. Ukažte, že následující řady mají uvedené součty

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}, & \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}, & \text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}, \\ \text{d) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(k \ln(k+1))} = \frac{1}{\ln 2}, & \text{e) } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1, & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \end{array}$$

4. Zjistěte, zda následující řady (absolutně) konvergují

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}, & \text{c) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\ln k)^k}, & \text{d) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} \\ \text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k^2}, & \text{f) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4k}{3k}}, & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n}, & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2^{-2n}}{n^3}. \end{array}$$

5. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících řad.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!} \cdot \sin(n!), & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}, \quad p \in \mathbb{R}, \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}, & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}. & \end{array}$$

6. Dokažte následující tvrzení.

- a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ konverguje právě když konverguje posloupnost (x_n) .
- b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a $x_n \geq 0$, tak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$.
- c) Pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $x_n \geq 0$, tak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sqrt{x_n}$.

7. Formální Caychyův součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je definován jako $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

a) Dokažte, že pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha^{2m}}{(2m)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

b) Spočítejte Cauchyův součin $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$. Co lze říct o konvergenci této řady?

8. Pokud vynecháme z řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ všechna n , která obsahují ve svém dekadickém rozvoji alespoň jednu devítku, tak tato řada již konverguje.

9. Zkonstruuje divergentní přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

10. Vyšetřete (absolutní) konvergenci následujících alternujících řad.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$

11. Budiž $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Dokažte:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konverguje.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 0$

12. Ukažte, že :

a) $\sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{1+p}$ pro $p > -1$, b) $\sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$

13. Spočítejte součty následujících řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

14. Určete konvergenční radius mocninných řad

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{5} \right)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + a^n) x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-2)^n}{n^3} x^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^{2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$

15. a) Dokažte *Cauchyovo (=Leibnitzovo, kondenzační) kritérium*: Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

b) Ukažte pomocí tohoto kritéria:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

16. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}, \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln \ln n)^q},$$

kde $p > 0, q \geq 0$ jsou daná reálná čísla. Ukažte taky, že součet řady v a) je menší než $\frac{\pi+2}{4}$.

17. Leibnitz: Nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a konverguje k nule. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konverguje.

Dirichlet: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a konverguje k nule. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Abel: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a omezená. Pak

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Zjistěte, zda konvergují následující řady:

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{\log(n)}, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}, & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1/n)}{\ln \ln n}, & h) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}. \end{array}$$