

Matematická analýza pro fyziky II

LS 2015/16, MFF UK

1. Cvičení

1. Spočtete : a) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ b) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ d) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{(x+\frac{1}{x})} dx$

Návod : V d) použijte substituci $t = x + \frac{1}{x}$.

2. Pomocí Riemannova integrálu spočtete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

3. Spočtete

a) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$ b) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$
c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ d) $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

4. Riemannova funkce

Buď $R(x) = 0$ pokud x je iracionální, a $f(x) = \frac{1}{q}$ pokud $x = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a p, q nesoudělné.)
Ukažte, že R je na $[0, 1]$ Riemannovsky integrovatelná.

5. Spočtete plochu množiny ohraničené křivkou

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \right\}.$$

Udělejte si nejprve obrázek. Tato křivka se nazývá asteroida.

Návod: Pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

6. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$, b) $\int_0^{\infty} x^n e^{-\sqrt{x}} dx$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$.

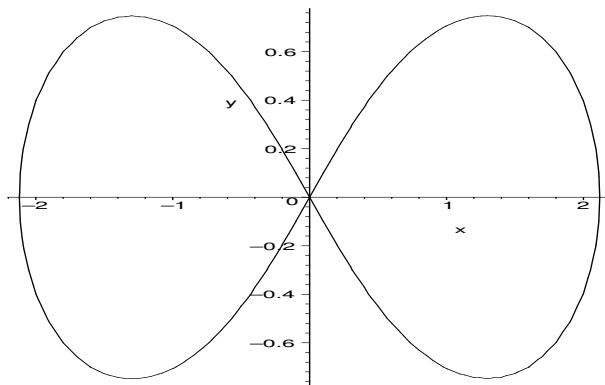
7. (i) Spočtete plochu *elipsy*

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b > 0.$$

(ii) Spočtete plochu ohraničenou *Bernoulliho lemniskátou*:

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \right\}, \quad a > 0.$$

Návod:



Odvodte parametrické vyjádření v polárních souřadnicích.

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \quad r \in (0, \sqrt{2}a).$$

Integrujte pak od nuly do $\sqrt{2}a$ délku paprsku, který je omezen lemniskátou, tedy $\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)dr$.

8. Ukažte, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} dx}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = 1.$$

9. Určete

$$a) \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt \right) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$$

10. Buď $f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ dána.

(i) Plyne z $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ vždy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

(ii) Plyne z $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ vždy existence limity $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$?

(iii) Buď f navíc stejnoměrně spojitá. Plyne pak z $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ vždy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

11. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů

$$a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad b) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad c) \int_0^\infty \frac{\sin(1/x) \arctan x}{x} dx \quad d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

12. Spočtete

$$a) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad b) \int_0^1 \ln x dx \quad c) \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad d) \int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

13. Buď f spojitá na $[0, \infty)$, a necht' existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. Dokažte, že pak $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A$.

14. Spočtete Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-|x|}$.

15. Budiž f spojitá. Dokažte pomocí vhodné substituce:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt \qquad \text{b) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin t) dt$$

Spočtěte s pomocí b) integrál $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

16. Vyšetřete následující integrály na konvergenci

$$\text{a) } \int_0^{\infty} x \sin x dx \qquad \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx \qquad \text{c) } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \qquad \text{d) } \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

17. Budiž $a_1 < \dots < a_n$. Pro které parametry p_1, \dots, p_n konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} \dots |x - a_n|^{p_n}}?$$

18. Spočtěte nevlastní integrály

$$\text{a) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1 - x^2|}} \qquad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} \qquad \text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}.$$