<u>Věta (unicita Haarovy m.)</u>: Nechť G je lokálně kompaktní a μ je levá Haarova míra. Je-li ν levá Haarova míra, pak $\exists c>0$ $\mu=c\nu$.

<u>Dk.</u>: vynechán. Viz např. bc-práce M. Dechiffre (Kodaň). Důkaz se opírá o Tonelliho větu (snazší než $\exists$) a opět verzi Urysohnovy věty $\square$

! Konstrukce <u>modulu</u> (modulární fce). $\forall g\in G$, μ levou H. m.

- $\mu_g(U):=\mu(Ug)$.
- Zřejmě $\mu_g(hU)=\mu(hUg)=\mu(Ug)=\mu_g(U)$, tj. μ_g je levá H. míra (radonovskost zřejmá). Dle unicity
- $\exists c_g>0$, že $\mu_g(U)=c_g\mu(U)$ $\forall U$. Definujeme
- $\Delta(g):=c_g$, $\Delta: G\to\mathbb{R}^+$. $[\mu_g(U)=\Delta(g)\mu(U)]$

<u>Tvrzení 1</u>: 1. Δ je homom. grup.

2. Δ je spojitý

3. $\Delta^\mu=\Delta^\nu$ $\forall\mu,\nu$ levé Haarovy míry

Dk.: 1) a) $\Delta(g_1g_2)\mu(U)=\mu(Ug_1g_2)=\mu_{g_2}(Ug_1)=\Delta(g_2)\mu(Ug_1)=\Delta(g_2)\Delta(g_1)\mu(U)$.

$\mu(Ug_1g_2) = \mu_{g_1g_2}(U) = \Delta(g_1g_2)\mu(U)$

Buď $\mu(U)\neq 0$ (stačí U otevř.) Odtud $\Delta(g_1g_2)=\Delta(g_1)\Delta(g_2)$

b) $\Delta(e)=\Delta(e^2)=\Delta(e)\Delta(e)$ $\Rightarrow \Delta(e)=1$ ($\Delta(e)=0$ nelze dle $c_e>0$). Odtud triviálně $\Delta(g^{-1})=\Delta(g)^{-1}$.

2) spoj. vynechána (důsl. věty o stejn. spoj.). Dechiffre pro zájemce

3) $\nu_g(U)=\nu(Ug)\overset{\exists c\ \nu=c\mu}{=}c\mu(Ug)=c\Delta^\mu(g)\mu(U)=\Delta^\mu(g)\nu(U)$

$\nu_g(U)=\Delta^\nu(g)\nu(U)$ $\Big\}\Rightarrow \Delta^\mu(g)=\Delta^\nu(g)$ $\forall g$ (U otevř. $\Rightarrow \nu(U)\neq 0$)

Tvrzení 2: 1. $\Delta = 1$ a μ levá H.m., pak μ je i pravá Haarova míra.
(Analogicky: pravá $\tilde{\mu}$, Δ pro pravou, levá $\tilde{\mu}$.) Platí i: $\exists$-li μ levá, jež je i pravá $\Rightarrow \Delta = 1$.

2. G abelovská $\Rightarrow \Delta = 1$.

3. G kompaktní $\Rightarrow \Delta = 1$.

Dk.: 1. a) $\mu(Ug) = \Delta(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(Ug) = \boxed{\mu(U)} \Rightarrow \mu$ pravá
$\forall g$

Analog:
$\mu(gU) = \Delta^P(g)\mu(U) = \mu(U) \Rightarrow \mu(gU) = \mu(U) \Rightarrow \mu$ levá.

b) μ levá, jež je i pravá: $\left.\begin{array}{l} \mu(Ug) \underset{\text{pravá}}{=} \mu(U) \\ \overset{\text{def}\,\Delta}{\longrightarrow} \| \\ \Delta(g)\mu(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 1$

2. G abel $\left.\begin{array}{l} \mu(Ug) \underset{\text{abel}\, G}{=} \mu(gU) \underset{\text{levost}\,\mu}{=} \mu(U) \\ \| \\ \Delta(g)\mu(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = 1$

Opět $\mu(U) \neq 0$.

3. G kpt., μ levá $\Rightarrow \mu$ Radon $\overset{*)}{\underset{\text{nije lok. kon.}}{\Longrightarrow}} \boxed{\mu(G) < \infty}$
$= G$

Dále $\mu(G) \underset{G = Gg\ (R_g \text{ homeo})}{=} \mu(Gg) = \Delta(g)\mu(G) \Rightarrow \Delta = 1$.

Definice: G lok. komp., $\Delta = 1 \Rightarrow G$ sluje unimodulární.
μ levá Haarova, jež je i pravou sluje Haarovou.

Pozn.:
- Def unimodularity nez. na μ výběru (Tvrzení 1)
- G unimodulární $\Leftrightarrow$ každá levá Haarova je i pravou ($\Leftrightarrow$ každá pravá je levou), jak plyne z Tvrzení 2.

---

*) V deChiffre je $\mu(K) < \infty$ $\forall K$ cpt součást def. radonovskosti, což není úplně std. U nás to plyne takto: Máme funkcionál I μ a pro něj Riesz ova věta poskytne μ. O té deChiffre na s. 14 "Now we..." dokáže, že $\mu(K) < \infty$. (Tož u něj je to součást radon. U nás to však stačí, až chceme uznali platnost $\overset{*)}{\Longrightarrow}$ výše.) [S. 14 hned nakonec.]

Příklady Haarových měr (vč. levých nebo pravých Haarových měr).

1. Lebesgueova na $\mathbb{R}^n$.

2. Počítací : $\mu(U) = \# U$ $\forall U$ měřitelnou v Σ_X. Σ_X Borelova pro X top. prostor. Pokud X diskrétní $\Rightarrow \mu$ je Radonova (vč. lok. konečnosti) a μ je levo-(i pravo-)invariantní.
Diskrétnost X není nutná: (X, τ_X) kofinitní topologie na nekonečné množině X. Borelovská σ-algebra:
$\Sigma_X = \{U \subseteq X \mid U$ konečná nebo $X \setminus U$ konečná$\}$.

$$\mu(U) = \begin{cases} \#U, & U \text{ konečná} \\ \infty, & \text{jinde} \end{cases}$$

. μ zjevně lok. kon ($\forall x$ $U_x := \{x\}$ je ze Σ_X a $\mu(\{x\}) = 1$), radonovskost (není obtížné) a invariance (zřejmá).

3. $(\mathbb{R}^{>0}, 1, \cdot)$ $\mathbb{R}^{>0} \subseteq \mathbb{R}$ s euk. topol.

$\mu(U) := \int_{\mathbb{R}^{>0}} \chi_U \frac{d\lambda_\mathbb{R}}{x}$ | $\mu(a,b) = \int_{\mathbb{R}^{>0}} \chi_{(a,b)} \frac{dx}{x} = \int_a^b \frac{dx}{x} = \boxed{\ln \frac{b}{a}}$

$\Sigma_{\mathbb{R}^{>0}} = \{$σ-algebra leb. měřitelných$\}$

radonovskost (z radonovskosti $\lambda_\mathbb{R}$)

lok. konečnost: $x \in \mathbb{R}^{>0}$ … $(\frac{x}{2}, 2x) \ni x$ $\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{dx}{x} = \ln 4 < \infty$

U měř. invariance: pro intervaly (pak z radonovskosti):

$\int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x} = \ln \frac{rb}{ra} = \ln \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}$.

Někdy se volí $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_U (\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$

4. $(S^1, 1, \cdot)$ $\subseteq \mathbb{R}^2$, $U \subseteq S^1$ měřitelná: $\mu(U) = \int_0^{2\pi} \chi_U (\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$

Př.: $U = \{(c\varphi, s\varphi) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$

$\mu(U) = \int_0^{2\pi} \chi_U(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ plpo.

$$\chi_U(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) = \begin{cases} 0 & \varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \\ 1 & 0 \le \varphi_0 \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5. Spočtěte Δ pro $\mathbb{R}^{>0}$. $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\mu_r(U) = \mu(Ur) = \int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x} dx = \ln\frac{br}{ar} = \ln\frac{b}{a} = \mu(U) \Rightarrow$$

$\underline{U = (a,b)}$

$$\boxed{\Delta(r) = \frac{\mu_r(U)}{\mu(U)} = 1}$$

Tj. $\mathbb{R}^{>0}$ je unimodulární (je abelovská).

$\subseteq$6. Grupa $G \doteq GL(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ (ind. topologie) indukuje

Ubuď borelovská v G nebo obecněji měřitelná. Připomínáme, že může $\int = \infty$

$$\mu(U) := \int \chi_U(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|}$$. Buď $A \in Gl$. Zkusme levoinvarianci

$$\mu(AU) = \int \chi_{AU}(x) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(x)}{|\det(x)|} = \left| \begin{matrix} x = Ay \\ dx = \det A\, dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \chi_{AU}(Ay) \frac{|\det(A)|}{|\det(Ay)|} d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y) = \int \chi_U(y) \frac{d\lambda_{\mathbb{R}^{n^2}}(y)}{|\det(y)|}$$

$= \mu(U) \Rightarrow \mu$ je levoinvariantní.

Je $\neq 0$. Je radonovská . je

!7. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x > 0, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$; std. euc. topol. $\subseteq \mathbb{R}^4$

a) G je grupa (cvičení)

b) $G \subseteq \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$. G je lok. komp. (Navíc G je dokonce Lieova)

c) $\mu(U) = \int_G \chi_U \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} d\lambda_{\mathbb{R}^2}$ $\left[x^{-2}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := a^{-2} \right]$

Uot. v G

$$\mu\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U\right) = \int_G \chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-2} d\lambda_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

$$\chi_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U}, \exists, \text{ tj. } = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y-b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

Integruji tedy
$$\int_{(G\subseteq)\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_U\begin{pmatrix}\frac{x}{a} & \frac{y-b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix} x^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2} \quad \left|\begin{array}{l} \text{subst. } x' = \frac{x}{a} \\ y' = \frac{y-b}{a} \\ \mathrm{Jac}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'}\end{pmatrix} = a^2 \end{array}\right.$$

" $dx\,dy = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'} \cdot dx'dy'$ "

$$= \int_{(G\subseteq)\mathbb{R}^2} \chi_U\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix}(x'a)^{-2}\,|\mathrm{Jac}|\,d\lambda'_{\mathbb{R}^2} = \int_{(G\subseteq)\mathbb{R}^2} \chi_U\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2} a^2\, d\lambda'_{\mathbb{R}^2}$$

$$= \int \chi_U\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix} x'^{-2}\, d\lambda'_{\mathbb{R}^2} = \mu(U).$$ Tj. μ je levoinvariantní!

- μ není pravoinvariantní:

$$\mu\left(U\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \int_G \chi_{U\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix} x^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \left[\begin{array}{l}\chi_{U\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in U}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow$$

$$\left.\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{x}{a} & \frac{-xb+ya}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in U\right] = \int_G \chi_U\begin{pmatrix}\frac{x}{a} & -x\frac{b}{a}+y\\ 0 & 1\end{pmatrix} x^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \left|\begin{array}{l}\text{subst} \\ x' = \frac{x}{a} \\ y' = -\frac{b}{a}x + y\end{array}\right.$$

$$\mathrm{Jac}\ "\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}" = \begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \frac{1}{a} \Rightarrow \mathrm{Jac}\ \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} = a \quad \Big| =$$

$$= \int \chi_U\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix} x'^{-2} a^{-2}\cdot \underline{a}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{a}\int \chi_U\begin{pmatrix}x' & y'\\ 0 & 1\end{pmatrix} x'^{-2}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

$$= \frac{1}{a}\mu(U) \neq \mu(U),$$ kdykoliv $\mu(U) \neq 0 \wedge a \neq 1$.
(Stačí tedy $a \neq 1$ a $\mu(U) > 0$.)

- Podgrupy unimodulárních nemusí být unimodulární!

8. $SL(n, \mathbb{R})$ je unimodulární $\{A \mid \det A = 1\}$.

9. Heisenbergova grupa také

Cvičení

1. Okolí v topologických grupách

a) $\forall U \subseteq G$ ot., $\forall x \in G$: xU, Ux, U^{-1} otevř.

Dk.: L_x, $R_{x^{-1}}$ i $^{-1}$ jsou homeom.

b) $\forall U \subseteq G$ okolí e $\exists V \subseteq U$ sym. okolí e. (V sym $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x \in V \Rightarrow x^{-1} \in V$, $\Leftarrow$ triv.)

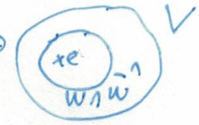
Dk.: U^{-1} je okolí e: 1) $e \in U^{-1}$

2) $e \in W \subseteq U$, W ot. $\Rightarrow W^{-1}$ ot $\wedge$ $e \in W^{-1}$

Zjevně $W^{-1} \subseteq U^{-1}$ ($\underline{x \in W^{-1}} \Leftrightarrow x^{-1} \in W \Rightarrow x^{-1} \in U$ $\Leftrightarrow \underline{x \in U^{-1}}$)

$\boxed{V := U \cap U^{-1}}$ je okolí e: $x \in \underline{W^{-1} \cap W} \Rightarrow x \in W \wedge x \in W^{-1} \Rightarrow$ $x \in U \wedge x \in U^{-1} \Rightarrow x \in U \cap U^{-1}$, tj. $W^{-1} \cap W \subseteq V$.

$e \in W$, $e \in W^{-1} \Rightarrow e \in W \cap W^{-1} \Rightarrow$



V sym: $x \in V \Rightarrow x \in U \cap U^{-1}$ $\Rightarrow x \in U^{-1} \Rightarrow x^{-1} \in U$; $\Rightarrow x \in U \Rightarrow x^{-1} \in U^{-1}$ $\Big\}$ $x^{-1} \in V$.

c) $\forall U \subseteq G$ otevřené okolí e $\exists$ sym. V, okolí e, že $VV \subseteq G$.
(otevřené $\Uparrow$ pro jednoduchost)

$\mu: G \times G \to G$ (násobení), $\mu^{-1}(U) \subseteq G \times G$, $\mu^{-1}(U)$ otevřené $\wedge$ $(e,e) \in \mu^{-1}(U)$

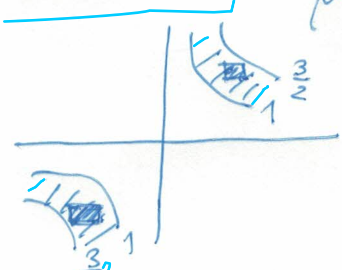
Z def. souč. topol.: $V_1 \times V_2 \subseteq \mu^{-1}(U)$, V_1, V_2 otevřené a $e \in V_1$ a $e \in V_2$. $V := V_1 \cap V_2$ $\quad VV = (V_1 \cap V_2)(V_1 \cap V_2) \subseteq V_1 V_2 \overset{?}{\subseteq} U$:

Buď $xy \in V_1 V_2$ $\quad xy = \mu(x,y) \in U$, tj. $V_1 V_2 \subseteq U$.

Př.: $\mu^{-1}(U)$ nemusí být součinem množin („chyba" v bc-práci doliffra.

$\underline{G = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ $\quad \underline{1 < x < \tfrac{3}{2}}$ ... U

$\mu^{-1}(U) = \{(x,y) \mid 1 < xy < \tfrac{3}{2}\}$



Evidentně $\mu^{-1}(U)$ není $\times$, ale ... obsahuje obdélníky (součiny).

Cvičení

Zpět ke $\mathbb{Q}_p$.

Def: Norma / Valuace na $\mathbb{K}$ tj. 1) $|x| \Rightarrow x=0$, $|x| \geq 0$

2) $|xy| = |x||y|$

3) $|x+y| \leq |x|+|y|$, $\forall x,y \in \mathbb{K}$, sluje

nearchimedovská, pakud $|x+y| \leq \underbrace{\max\{|x|,|y|\}}_{\forall x,y}$. Pakud ne, sluje archimedovská.

Tvrzení: Je-li $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ nearchimedovská, tak $|x+y| = \max\{|x|,|y|\}$, kdykoliv $|x| \neq |y|$. Navíc $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ je pak nearchimedovské.

Dk.: • BÚNO $|x|>|y|$. Pak $|x+y| \overset{(*)}{\leq} |x|$. Chceme: $|x+y| = |x|$.

Platí $|x| = |x+y-y| \leq \max\{|x+y|, |y|\}$! Pak

$(*)$ $|x| \leq |x+y|$. Celkem $|x+y| = |x|$, cbd.

• $\exists x \neq 0$ $1 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$: $\forall n$ $|n1| \leq |1|$ ← nearchim. normy, což je ve sporu $|nx|>|y|$ $\exists n$ $\square$

$\exists y=1$ $1=|1| \leq |1| = 1$

Pozn.: Valuace a norma se užívá často zaměnně. Všimněme si, že v případě těles požadujeme u těchto multiplikativitu.

Pozn.: • $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ Norma $|\,|$ je archimedovská $x=1=1$ $|x+y| = 2 \nleq \max\{|1|,|1|\}$.

Pozn.: $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ je archimedovské $\Rightarrow$ norma je archimedovská.

Dk. Zřejmé. [$|\cdot|$ je nearchim. Tj. $\forall x,y$ $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$

Pak ovšem $|n1| \leq 1 \leq |1|$, a tak pro $x=y=1$ $\nexists n$ $|n1| > |1|$.

$|1|=1$! těleso má aspoň 2 prvky $(0 \neq 1)$.]

Podstatné: $|2 \cdot 1|_2 = \frac{1}{2}$ norma dvojná sobku se zmáží!