2. Opakování nikl. pojmů z topologie a teorie míry

Po zopakování nikl. pojmů z topologie a teorie míry se budeme věnovat příkladům Haarových měr. Podstatným pojmem je lokální kompaktnost.

Topologický prostor na X :

1) $X \neq \emptyset$

2) topologie na X = podmnožina potenční množiny 2^X splňující
$\underbrace{\text{topologie na } X}_{\tau_X}$

a) $\emptyset, X \in \tau_X$

b) I množina, $(A_i)_{i \in I}$ systém množin indexovaný I. Pokud $(\forall i \in I)(A_i \in \tau_X) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_X$

c) $A, B \in \tau_X \Rightarrow A \cap B \in \tau_X$

Pozn.: Systém množin je zobrazení. Sjednocení je však jen přes obrazy (těchto zobr.)

$I = \mathbb{N}$ $(A_1, A_2, \dots)$ je zobr. $a : I \to \tau_X$

Nesjednocuji $\underline{a}$, ale $Rng(a)$.

Prvkům Tau_X říkáme otevřené. Uzavřené jsou doplňky otevřených do X. (Nikoliv ty, co nejsou v X. Uzavřená může být otevřená a otevřená může být uzavřená. Nutná poznámka.)

① TOPOLOGICKÉ NEZBYTNOSTI

Def: <u>Topologická grupa</u> = Hausdorffův top. prostor G, že $\cdot : G \times G \to G$, $^{-1} : G \to G$, $e \in G$ definují strukturu grupy a $\cdot$ a $^{-1}$ spojité.

Pozn.: Na $G \times G$ součinová topologie.

Pozn.: $^{-1} : G \to G$ je homeomorfizmus, neboť $^{-1}$ je spojitá a involuce ($f^2 = \mathrm{Id}$).

Př.: 1) Každá grupa s diskrétní topologií.

2) Každá grupa s aspoň dvěma prvky a triviální top. není!

3) Grupa $U(1) \subseteq \mathbb{C}$, $U(1) = \{ e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \}$ abelovská.

4) Každá podgrupa $GL(n, \mathbb{C}) = \{ A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A$ invertibilní$\}$

5) $(\mathbb{R}, +, 0)$ s Eukleidovou normou. Obecněji $(\mathbb{R}^n, +, 0)$.

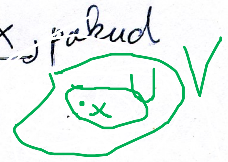
6) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ s Eukleidovou normou; totéž co diskrétní.

7) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s Eukleid; $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s diskrétní. $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ disk., Eukleid; $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ disk., Eukleid.

8) G nekonečná s kofinitní topologií není!

<u>Připomenutí</u>:

Def: $x \in X$, X top. prostor. $V \subseteq X$ se nazývá <u>okolí x</u>, pokud $x \in V$ & $\exists\, U$ otevřená, že $x \in U$ a $U \subseteq V$.



Pozn.: • Tj. každá nadmnožina otevřené množiny, která obsahuje x, je okolí x. (Spec. $\forall$ otevř. mny obsahující x jsou okolí!)

• Okolí nemusí být otevřené: $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ okolí 0.

Def.: X se nazývá <u>lokálně komp. top. prostor</u>, pokud $\forall x \in X$ existuje okolí, jehož uzávěr je kompaktní.

Pozn.: Pokud každý bod x je obsažen v otevřené množině, jejíž uzávěr je kompaktní, pak je příslušný prostor lokálně kompaktní.

Pozn.: X kompaktní, pokud $\forall$ otevřené pokrytí $(U_i)_{i\in I}$ má kon. podpokrytí. Tj. $\forall i \in I$ U_i otevř. v X, $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ & $\exists J \subseteq I : \# J < \infty$, že $\bigcup_{j\in J} U_j = X$.

Př.: 1) Každý kompaktní je lokálně kompaktní, $V = X$

2) X s diskrétní topologií je lok. kompaktní: singleton je otevřený.

3) X s triviální topologií je lok. komp., dokonce kompaktní

4) V...TVS a $\dim V = \infty$ není lok. komp.

$\mathbb{R}^n$...TVS je lok. kompaktní.

Př.: $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s disk. je lok. komp., ale $(\mathbb{Q}, +, 0)$ s indukovanou topologií $\hookrightarrow \mathbb{R}$ eukleid. není lokálně kompaktní, ani $\mathbb{Q}$ s indukovanou není lok. komp. jako t.p.

D.k. Vezmi $x_0 = 0$ a lib. okolí V bodu x_0.

V obsahuje U ot. v $\mathbb{Q}$, $0 = x_0 \in U$.

U je otevřená v $\mathbb{Q} \Leftrightarrow U = U' \cap \mathbb{Q} \wedge U'$ ot. v $\mathbb{R}$

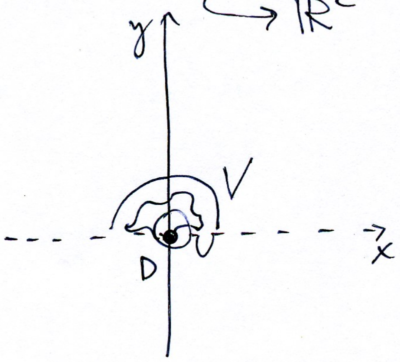
$(0 \in U')$. Známe: $U' \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Existuje.

Vezmi iracionální $y_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

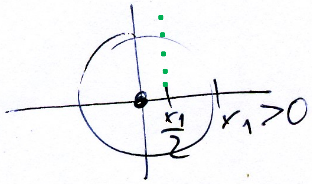
$a_n = \frac{\lfloor 10^n y_0 \rfloor}{10^n} \longrightarrow y_0$ v $\mathbb{R}$ a $a_n \in U$ pro dost velká $\cancel{x}$ n. $(a_n)_{n \geq n_0}$ je cauchyovská v U, a tedy i ve $\overline{V}$, ale nekonverguje ve $\overline{V}$.

Tj. $\overline{V}$ není kompaktní. [Uzávěr přirozeně v $\mathbb{Q}$, být s indukovanou topologií / normou.]

Pr.: $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cup \{(0,0)\}$ není lok. kompaktní, neboť nula nemá přísl. okolí. Pro spor ($\forall$)



- Nechť V je okolí $(0,0)$ obsahující otevřenou U a $(0,0) \in U$. Chceme najít posloupnost ve $\overline{V}$, jež je Cauchyovská, ale nekonverguje.
- $U = U' \cap M$, U' otevřená v $\mathbb{R}^2$ a U' obsahuje $(0,0)$ $\xrightarrow{\text{„konec } \mathbb{R}^n\text{"}}$ U' obsahuje ot. kruh D (dist) ot. se středem v $(0,0)$. Nechť $\overline{D}$ protíná $\overleftrightarrow{x}$ v bodě x_1; $x_1 > 0$.



Uvažme posloupnost

$$a_n = \left(x = \frac{x_1}{2},\ y = \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Od jistého členu je a_n v D, tj. v $U \subseteq V \subseteq \overline{V}$.

Zjevně $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{x_1}{2}, 0\right) \notin \overline{V}$; uzávěry opět jen v M. $(a_n)_{n > n_0}$ cauchyovská — zřejmé $|a_n - a_m| = \frac{1}{n-m}$ (dále druhý semestr..).

Sjednocení lok. kompaktních A_1, A_2 v lok. komp. M nemusí být lok. komp., pokud je uvažováno s topologií indukovanou z M.

[Disj. sjednocení je jiný problém.]

Namísto cahuchyovská mohu říkat konvergující posloupnost v uzávěru V, jejíž limita není v uzávěru V, tj. uzávěr V není kompaktní.

② NEZBYTNOSTI Z MÍRY

Def: σ-algebra na $X \neq \emptyset \equiv \Sigma \subseteq 2^X$ taková, že

1. $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$
3. $\emptyset \in \Sigma$

Pozn.: 1) $\Sigma \neq \emptyset$

2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus \underset{\Sigma}{\underset{\cap}{A_i}})}_{\in \Sigma} \in \Sigma$

3) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B = A \cap (X \setminus \underset{\Sigma}{\underset{\cap}{B}}) \in \Sigma$

4) Prvky Sigma nazýváme měřitelné

Míra a topologie

X topol. prostor a $\mathcal{T}_X \subseteq 2^X$ topologie na X.

Borelova σ-algebra (na $(X, \mathcal{T}_X)$) $= \sigma$-algebra Σ na X obsahující $\mathcal{T}_X$ a nejmenší taková.

Připomeňme nejmenší: $\forall \Sigma'$ σ-algebra na X obsahující $\mathcal{T}_X$ je $\supseteq \Sigma$.

((Minimální = neexistuje menší))

Existence Borelovy σ-algebry

- $A_{\mathcal{T}_X} := \{\Sigma \mid \Sigma$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{T}_X\}$ klasický trik; $2^X \in A_{\mathcal{T}_X} \Rightarrow A_{\mathcal{T}_X} \neq \emptyset$.
- $\Sigma_0 := \bigcap A_{\mathcal{T}_X} \longrightarrow$ a) Σ_0 je σ-algebra obsahující $\mathcal{T}_X$
  b) je nejmenší (↯): $\exists\, \Sigma' \not\supseteq \Sigma_0 \Rightarrow \Sigma' \neq \Sigma_0$. Navíc $\Sigma_0 \cap \Sigma \in A_{\mathcal{T}_X}$.
  $\Sigma_0 \cap \Sigma' \subsetneq \Sigma_0$.
  $\Sigma_0 = \bigcap A_{\mathcal{T}_X} \subseteq \Sigma_0 \cap \Sigma'$, což je spor.

Určitá

Nejmenší je jediný $\left(\begin{matrix} \Sigma_0^1 \leq \Sigma_0^2 \\ \Sigma_0^2 \leq \Sigma_0^1 \end{matrix} \right\}$ slabá antisymetrie $\Sigma_0^1 = \Sigma_0^2$ ... $\Big)$

Označení: Pokud $X \neq \emptyset$ a Σ je σ-algebra na X, nazveme (X, Σ) měřitelný prostor

Def: $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ nazveme mírou na měř. prostoru (X, Σ), pokud a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\forall (A_i)_{i=1}^{\infty}$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ (σ-aditivita na disj. systému)

Pozn.: 1) g schodovitá, $g : X \to \mathbb{R}$. $\int_X g \, d\mu := \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$

$g = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$

$i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$

$f \geq 0$

2) $\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \leq f, g \text{ schodovitá a } g \geq 0 \right\}$

Std. postup:

- Nechť $f = f_+ - f_-$, pak $\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$, kde

$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0$

$f_-(x) := -\min\{f(x), 0\} \geq 0$, pokud pravá strana má smysl v rámci aritmetiky na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$\mathcal{L}^1(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \int_X f \, d\mu < +\infty \right\}$, $L^1(X) = \mathcal{L}^1(X) / \cong$

$f \cong g \Leftrightarrow f - g = 0$ s.v. $\Leftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Pozn.: $(L^1(X), \| \, \|)$, kde $\|f\| = \int_X |f| \, d\mu$, je Banachův $\forall (X, \Sigma)$ měřitelný prostor a míru μ na něm.

(Není nutná „topologizace".)

Př.: 1) $X \neq \emptyset$, $\Sigma \subseteq 2^X$, $\mu(A) = \begin{cases} \infty & A \text{ nekonečná} \subseteq X \\ \# A & A \text{ konečná} \subseteq X \end{cases}$

libovolná σ-algebra na X   tzv. počítací míra

2) $X = \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \{A \subseteq X \mid A$ je lebesgueovsky měřitelná $\}$. Σ je Borelova pro topologii indukovanou Eukleidovou normou na $\mathbb{R}^n$.
Známe: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená $\Rightarrow$ U je lebesgueovsky měřitelná.

Terminologie (konvence): (X, Σ) měřitelný prostor a μ míra na něm. Pak (X, Σ, μ) nazveme prostor s mírou.
Pokud X topologický prostor a Σ je Borelova, pak μ nazveme Borelovu míru.

Def: $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ buď Borelova míra na X. μ slyje lokálně konečná $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X \ \exists U \in \tau_X$, že $\mu(U) < \infty$.

Pozn.: $\tau_X \subseteq \Sigma$, def. má smysl.

Př.: 1) Lebesgueova míra je lok. konečná Eukleidovou normou,
2) $X = \mathbb{R}$, top. daná Eukleidovou normou, Σ Borelova a μ počítací. Pro $x = 0$ má existovat otevřená U (nejen měřitelná!) $\Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ pro vhodné ε.
Pak ovšem $\mu(U) = \mu(-\varepsilon, \varepsilon) + \mu(U \setminus (-\varepsilon, \varepsilon))$
$\geq \mu(-\varepsilon, \varepsilon) = \infty$.
Počítací na $\mathbb{R}$ není lok. konečná!

Definice: Borelova lokálně konečná míra sluje Radonova, if 1) $\mu(A) = \inf_{\substack{U \supseteq A \\ \text{otevř}}} \mu(U)$ $\forall A$ měřitelnou — silně vnější reg.

2) $\mu(A) = \sup_{\substack{K \subseteq A \\ \text{kompaktní}}} \mu(K)$ $\forall A$ měřitelnou — slabě vnitřně reg.

Pozn.: 1) Lebesgueova na $\mathbb{R}^n$ je Radonova

2) $X = \mathbb{R}$ s kospoč. mírou. Co je to kospočetná míra? Nechť $\emptyset \neq X$ je množina.

Cvičení

a) Kospočetná topologie: $\emptyset \in \tau_X$ a pro $\emptyset \neq A \subseteq X$ je $A \in \tau_X$ iff $X \setminus A$ je spočetná.
(Kofinitní je podmna kospočetné!)
Proč je to topologie? 1) $\emptyset \in \tau_X$. 2) $A, B \in \tau_X \Rightarrow$
$\Rightarrow X \setminus A \wedge X \setminus B$ spočetné $X \setminus (A \cap B) =$
$= \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{spoč.}} \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\text{spoč}}$ spoč. 3) $(A_i)_{i \in I}$ lib. systém z $\tau_X \Rightarrow X \setminus A_i$ spočetná $\forall i \in I$

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(X \setminus A_i)}_{\text{spočetné}} \quad \text{(de Morgan)}$$

Průnik spočetných je spočetná, tj. $\bigcup_{i \in I} A_i$ je τ_X.

b) Vezmeme Borelovu σ-algebru pro kospoč. topologii na X. Spe. každá mna se spoč. doplňkem je měřitelná. ← nejvýš

Polož $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ spočetná} \\ 1 & \text{jindy.} \end{cases}$

Kospoč. míra.

Ad příklad: $X = \mathbb{R}$. Vezmi $A = \mathbb{Q}$ měřitelná a dokonce $\mu(\mathbb{Q}) = 0$

S kospočetnou topologií a kospočetnou mírou.

$U \supseteq \mathbb{Q}$ buď otevřená v kospoč. top., tj. $\mathbb{R}\setminus U$ je spočetná $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ U je nespočetná

$\Rightarrow \mu(U)=1$. Je tedy $\inf\limits_{\substack{U\supseteq \mathbb{Q}\\ \text{ot.}}} \mu(U) = \inf\limits_{\substack{U\supseteq \mathbb{Q}\\ \text{ot}}} \{1\} = 1$

(Dokonce $\forall$ systémy ot. nadm. $\mathbb{Q}$.)

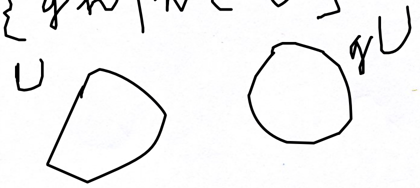
$\mathbb{R}$ s kospočetnou mírou tedy není Radonova.

Definice: Nechť G je topologická grupa a μ je Borelova míra na ní. Tuto nazveme levou Haarovou, pakud je Radonova, nenulová a $\forall g \in G$ $\forall U$ otevřenou v G je $\mu(gU)=\mu(U)$.

Pozn.: Analogicky pro pravou Haarovu.

Cílem je konstrukce Haarovy míry pro lokálně kompaktní grupy.

$gU := \{gh \mid h \in U\}$



Strana 10 není

11/10

Cvičení:

1. $U(1) := \{e^{2\pi i\varphi} \mid \varphi \in [0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ s indukovanou topologií. Násobení a inverze z $U(1) \subseteq \mathbb{C}^{\times} (= \mathbb{C}\setminus\{0\})$. Dokažte, že $U(1)$ je top. grupa

a) $U(1)$ je Hausd. „nebať" $\mathbb{R}^2$ je Hausd. a top. $U(1)$ je indukovaná inkluzí $U(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\cos 2\pi\varphi + i\sin 2\pi\varphi \mapsto$ $\mapsto (\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi)$).

← otevřené

b) $U(1) = \{e^{2\pi i\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

$\cdot : (z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$ je spojité!

c) ${}^{-1} : z = e^{2\pi i\varphi} \mapsto e^{-2\pi i\varphi}$ $\quad \boxed{\varphi \mapsto -\varphi}$ spoj. a $\exp : x \mapsto e^x$

je spoj.

2. $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) \mid A \text{ je regulární}\} \subseteq M(n,\mathbb{C})$ top., $\simeq \mathbb{C}^{2n^2}$ s Euc.

Nás. a inverze matic je topologická grupa

a) $M(n,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ Hausd; $GL(n,\mathbb{C})$ s ind. je Hausd.

b) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$ polynom

$A \mapsto A^{-1}$

c) $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \det A_{\hat{j}\hat{i}}}{\det A}$ ← A s vynechaným j-tým ř. a s i-tým sl.

podíl polynomů

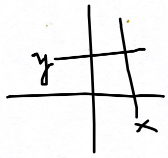
3. $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ je topologická grupa pro diskrétní i pro eukleidovskou topologii

a) Hausd. zřejmá v obou

b) $\mathbb{Q}^+$ má diskrétní $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ má diskrétní $\Rightarrow$ násobení je spojité. Spojitost inverze z diskr. $\mathbb{Q}^+$.

Ad $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ diskrétní. Buď $U \subseteq \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ podmnožina.

Chceme U je otevřená. $U = \bigcup_{\underset{\sim}{x} \in U} \{\underset{\sim}{x}\} = \bigcup_{(x,y) \in U} \{(x,y)\}$.



Stačí $\{(x,y)\}$ je otevřená, ale jde o $p_1^{-1}(x) \cap p_2^{-1}(y)$, kde $p_i : (\mathbb{Q}^+)^2 \to \mathbb{Q}^+$ jsou projekce na příslušné faktory součinu $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$. $\{x\}, \{y\} \subseteq \mathbb{Q}^+$ otevřené $p_1^{-1}(\{x\}) \wedge p_2^{-1}(\{x\})$ otevřené (p_i spojité při součinové topologii). Průnik otevřený, tj. jsme hotovi.

Předpokládáme ale, že součinová topologie existuje. (Min. top. „obsahující" $\{ p_i^{-1}(U_i) \mid U$ ot v X_i, $p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$, $i \in I \}$, pak vezmu průniky.)

c) Spojitost nás a inverze v $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{R}$ (Euklidova). Plyne ze spojitosti nás. a inverze pro $\mathbb{R}$ (vezmu jen průniky příslušných okolí z $\mathbb{R}$ s $\mathbb{Q}^+$).

4. Nechť X je množina. Uvažujme X s topologií kofinitní, tj. U otevřená iff $X \setminus U$ je konečná nebo $U = \emptyset$.) Dokažte, že kofinitní topologie je „skutečná" topologie. Ukažte, že X s touto topologií není Hausdorffův, pokud X má nekonečný počet prvků.

Snadné: top pstor i Hausd.

~~13~~ 12

a) $A, B \in \mathcal{T}_X \Rightarrow X \setminus A$ konečná $\wedge$ $X \setminus B$ konečná.

b) $X \setminus (A \cap B) = X \setminus A \cup X \setminus B$ konečná

$A_i \in \mathcal{T}_X$ $\quad X \setminus \bigcup A_i = \bigcap \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{kon}}$ konečná.

c) $X \setminus X$ konečná

d) $\# X \geq \infty$ $\quad x \neq y$, oba z X. Pp. $\exists U_x \ni x$ $\exists U_y \ni y$

$U_x, U_y \in \mathcal{T}_X \wedge U_x \cap U_y = \emptyset$. Pak ale z def

$\# X \setminus U_x < \infty \quad \wedge \# X \setminus U_y < \infty$

$$X = X \setminus (U_x \cap U_y) = \underbrace{(X \setminus U_x)}_{\# \downarrow < \infty} \cup \underbrace{(X \setminus U_y)}_{\downarrow \# < \infty} \Rightarrow < \infty \ \text{↯}$$

$\# X \geq \infty.$

5. p-adická grupa $\mathbb{Q}_p$

Uvažme na $\underline{\mathbb{Q}}$ pro každé prvočíslo p funkci $| \ |_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+_0$ def. $\left|\pm \frac{a}{b} p^n\right|_p = p^{-n}$ $\left(= x \neq 0\right)$, kde $\underline{p \nmid a} \wedge \underline{p \nmid b}$ $a, b \in \mathbb{N}$ a $|0|_p := 0$. (Mohu požadovat navíc $(a,b)=1$)

Tvrzení: $| \ |_p$ je valuace na $\mathbb{Q}$, tj.

1) $|a+b|_p < |a|_p + |b|_p$ 2) $|ab|_p = |a|_p |b|_p$. 3) $|a|_p = 0 \Rightarrow a = 0$

Dk.: 1) Počítejme $\left| \frac{a_1}{b_1} p^n + \frac{a_2}{b_2} p^m \right|_p = \left| \frac{a_1 b_2 p^n + a_2 b_1 p^m}{b_1 b_2} \right|_p =$

$a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\text{(a) } n < m \quad = \left| \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}}{\underbrace{b_1 b_2}_{p \nmid b_1 b_2}} p^n \right|_p = p^{-n} = |a|_p \leq |a_p| + |b|_p \ (\text{z nezáp. } | \ |_p)$$

$p \nmid a_1 b_2 + a_2 b_1 p^{m-n}$, neb

by nutně muselo dělit $a_1 b_2$, tj. i a_1 nebo b_2, ale ani jedno dle předpokladu nedělí!

~~14~~ 13

b) Pokud $m=n$, pak $\left|\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}p^n\right|_p$ musím testovat

jinak: Nechť $p \mid a_1b_2+a_2b_1$, tj. $a_1b_2+a_2b_1 = k p^\alpha$

α největší možné. Pak $\left|\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}p^n\right|_p = p^{-(n+\alpha)}$.

Ovšem $|a|_p = p^{-n}$. Celkem $|a+b|_p \leq |a|_p$,

tj. i $|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$

c) $a=0 \vee b=0$ triviální!

2) $\left|\pm\frac{a_1a_2}{b_1b_2}p^{+n+m}\right|_p = p^{-n-m} = |a|_p |b|_p$ ✓

3) $|x|_p = p^{-n} = 0$ iff $x=0$ ✓

Absolutbetrag

Def: Těleso $\mathbb{k}$ s valuací $|\ |_v$ (někdy abs. hodn.)
slouje archimedovské pokud:
$\forall x \in \mathbb{k}\setminus\{0\}\ \forall y \in \mathbb{k}: |x| \leq |y| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
$|nx| > |y|$. Jinak sluje nearchimedovské.

$(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ s normou $|\ |$ ← klas. abs. hodnotou jsou archimedovská.

Př.:

Dk. d.cv.

Př.: Dokažte, že $(\mathbb{Q}, |\ |_p)$ není archimedovské.