Ideály v Banachových algebrách

<u>Definice</u>: $I \subseteq A$ nazveme <u>ideálem</u> (řiideálem obsírněji),
pokud $\forall a \in I \; \forall b \in A \quad ab \in I \wedge ba \in I$.
I nazveme <u>maximální</u>, pokud je vlastní ($\neq A$)
a $\forall J$ vlastní $J \supseteq I \Rightarrow J = I$ ($\Leftrightarrow J \underset{\text{ideál}}{\supsetneq} I \Rightarrow J = A$).

<u>Poznámka</u>: 1. $u \in A^\times \wedge u \in I$ ideál $\Rightarrow I = A$
$\forall b \in A : b = b\bar{u}u \in I$ „levost I"
Je tedy $A^\times \cap I = \emptyset$ pro maximální I (stačí vlastní).
Mluvíme však o unitálních algebrách, takže ne.
($N \in \mathcal{C}_0(X)$, X nekomp; $K(H)$, $\dim H > \infty$, takže ne.)

<u>Tvrzení</u>: A unitální Banachova. Každý vlastní ideál je v nějakém maximálním. Každý maximální je uzavřený. Pokud A je komut, pak $\forall a \in A \setminus A^\times \; \exists I_a$ max., že $a \in I_a$.

Dk.: 1. I vlastní. $X = \{J \mid J$ vlastní $\wedge J \supseteq I\} \neq \emptyset$
$\leq \; = \; \subseteq \quad (X, \leq)$ neprázdná částečně usp. množina
$(J_\alpha)_\alpha$ řetězec; $\bigcup_\alpha J_\alpha$ je horní závora?
$\bigcup_\alpha J_\alpha$ ideál, vlastní, $J_\beta \leq \bigcup_\alpha J_\alpha \; \forall \beta$ zřejmé.
Zorn.: X má maximální prvek, Z. Z je max id.
($\forall Z' \supsetneq Z \wedge Z' \neq A \Rightarrow Z' \in X \wedge Z$ není maximální.)

2. I maximální. $\bar{I}$ je také maximální.
a) $\bar{I}$ je ideál: $a \in A$, $b \in \bar{I}$
$a \lim_n b_n \underset{\text{spojitost}}{=} \lim_n \underbrace{ab_n}_{\in I} \in \bar{I}$. Obdobně zprava.

b) $\bar{I}$ je vlastní.

$A^\times$ ot. $A^\times \cap \bar{I} = \emptyset$

Tj. $\bar{I} = I$ a I je uzavřený.

3. $a \in A \setminus A^\times$: $I_a := aA$ je ideál (kom. A). $1 \notin I_a$ (jinak $a \in A^\times$).

Odtud I_a je vlastní. Z 1 $\exists I$ max : $I_a \subseteq I$.

$\square$

Pozn.: Buď A komutativní Banachova algebra. Pak
$\varkappa : \Delta_A \to \operatorname{Spec} A := \{ I \mid I \text{ maximální} \}$, $\varkappa(m) := \ker m$,
je bijekce. $m : A \to \mathbb{C}$

a) dobře def.: $\ker m \oplus \overline{\operatorname{im} m'} = A$ $\quad \overline{\operatorname{im} m'} = \operatorname{im} m' \cong \mathbb{C}$

$\Rightarrow \operatorname{codim} \ker m = 1 \Rightarrow$

$\ker m$ je maximální jako v.p. $(m \neq 0)$

[m spoj. $\Rightarrow \ker m$ uz. $\Rightarrow \varkappa \to$ uzavř. ideály]

$a \in \ker m$, $b \in A$ $\Rightarrow$ $m(ab) = m(a)\, m(b) = 0 \Rightarrow ab \in \ker m$

b) $\varkappa$ je inj.: $\varkappa(m_1) = \varkappa(m_2)$, tj. $x_0 \in \varkappa(m_1) \Leftrightarrow x_0 \in \varkappa(m_2)$

tj. $m_1(x_0) = 0 \Leftrightarrow m_2(x_0) = 0$. $1 \notin \ker m$ (jinak $m = 0$)

$x = \underset{\ker m}{x_0} + \underset{\operatorname{im} m'}{\lambda 1}$ $\quad m_1(x) = \lambda m_1(1) = \lambda = m_2(x_0 + \lambda 1) = m_2(x)$

$\Rightarrow m_1 = m_2$.

c) $\varkappa$ je surj.: $I \in \operatorname{Spec}(A)$ $\quad A/I$ je Banachova

$\|x + I\| = \inf_{i \in I} \|x + i\|$, I uzavřený, tj. kvocientní

norma je dobře def. $\quad (x+I)(y+I) := xy + I$

A/I komut. A/I neobsahuje žádný vl. ideál (jinak $\pi^{-1}(J_0) \oplus I \supsetneq I$) $\quad \pi : A \to A/I$

$\Rightarrow$ $\forall$ prvek je invertibilní dle bodu 3 předch. tvrzení

Tj. Gelfand-Mazur: $A/I \simeq \mathbb{C}1 \Rightarrow A \simeq I \oplus \mathbb{C}1$

$i + \lambda 1 \longleftarrow (i, \lambda 1)$

$m(x + \lambda 1) := \lambda$ does the job. $\square$

Pozn.: A komut. unitální $\Rightarrow$ stavy v bijekci s max. ideály. X alg. varieta (ireducibilní) $X \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$ (souř. obor X)

lokalizace $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ podle „Verschwindungsidealu" X.

Δ_A hraje roli prostoru. Zde sice Δ_A kompaktní, ale $\Delta_A \subseteq A'$ ← obecně „velký".

Banachovy $*$-algebry a Gelfand-Naimarkova věta

Definice: Banachova $*$-algebra je každá Banachova algebra $(A, \cdot, \| \|)$ vybavená navíc $* : A \to A$ involutivním antiautomorfismem, jež je izomorfismem normovaného prostoru $(A, \|\cdot\|)$ (= izometrií).

Pozn.: $**a = a$ $\quad *(ab) = *b *a$ $\quad *(a + \lambda b) = *a + \bar{\lambda} b^*$

$\| *a \| = \|a\|$. Značíme $a^* = *a$

Definice: Banachova $*$-algebra se nazývá C^*-algebra, pokud $\|a a^*\| = \|a\|^2$ (C^*-identita).

Příklady: 1. $(B(H), \cdot, \| \|_{op}, *)$ adjunkce operátorů, H Hilbertův; C^*-alg.

2. $K(H)$ analogicky. Těžší uzavřenost na $*$. C^*-alg

3. $(C_0(X), \cdot, \| \|, *)$ $f^*(x) = \overline{f(x)}$ C^*-alg. $\forall X$ lok. komp.

4. $(L^1(G), *, {}^*, \|\cdot\|_1)$ je $*$-Banachova algebra, kde

$f^*(g) := \Delta_G(g^{-1})\overline{f(g^{-1})}$, kde G je lok. kompaktní. To to nyní dokážeme.

Důležité vlastnosti modulárního faktoru (μ_G levá H.m.)

$R_y x = xy^{-1}$
$(R_y f)(x) = (f \circ R_y^{-1})(x) = f(xy)$

1. $\int \underbrace{(R_y f)(x)}_{=f(xy)} d\mu_G(x) = \Delta(y^{-1}) \int f(x)\, d\mu_G(x)$

2. $\int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\, d\mu_G(x) = \int f(x)\, d\mu_G(x)$

Dk.: 1. a) $f = \chi_U$, $U \in \Sigma$: $\int_G \chi_U(xy)\, d\mu_G(x) =$

$\chi_U(xy) = 1 \Leftrightarrow xy \in U \Leftrightarrow x \in Uy^{-1}$

$= \int_G \chi_{U\cdot y^{-1}}(x)\, d\mu_G(x) = \mu_G(Uy^{-1}) =$

$\left[= \mu_G^{y^{-1}}(U)\right] = \Delta(y^{-1})\mu_G(U) = \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_U(x)\, d\mu_G.$

b) Pomocí def. int.: $\int f = \lim_i \int s_i$, s_i schodovitá, obecně.

2. Pro tuto část budeme potřebovat (zopakujte si) Rieszovu větu o reprezentaci.

To, že modulární fce je spojitá (viz již řečeno dříve Bc-práce M. de Chiffre / Kobenhaven).

Analogický fakt $\mu_G(U) := \int_U d\mu_G$ (nebo $\int_G \chi_U\, d\mu_G$), což není Rieszova věta o repr.

4'

a) $\int R_y (f\tilde{\Delta})^{(x)} d\mu_G^{(x)} = \Delta(y^{-1}) \int (f\tilde{\Delta})^{(x)} d\mu_G = \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int (f\tilde{\Delta})^{(x)} d\mu_G(x)$

b) $\int (R_y f)^{(x)} \underbrace{\tilde{\Delta}^{(x)} d\mu_G^{(x)}} = \int (R_y f)^{(x)} \tilde{\Delta}(xy)\tilde{\Delta}(y^{-1}) d\mu_G^{(x)} =$

$= \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int (R_y f)^{(x)} \tilde{\Delta}(xy)\, d\mu_G(x) =$

$= \tilde{\Delta}(y^{-1}) \int R_y (f\tilde{\Delta})(x)\, d\mu_G(x) \overset{a)}{=} \tilde{\Delta}(y^{-1})\Delta(y)$

$\int (f \underbrace{\tilde{\Delta})^{(x)} d\mu_G}(x) =$

Tj. $\tilde{\Delta}(x)\, \mu_G(x)$ je pravoinvariantní míra.

c) μ_G^{-1} definovaná $\mu_G^{-1}(U) := [\mu_G(U)]^{-1}$ $\forall U$ měřitelnou nenulové míry je také pravoinv. míra.

z Rieszovy věty o reprezentaci (jedn.) plyne, že

$\boxed{\tilde{\Delta}(x)\ \ \mu_G(x) = c\ \ \mu_G^{-1}(x)}$ (Nám stačí $\int f(x)\Delta(x^{-1}) d\mu_G = c\int f(x^{-1}) d\mu_G$)

d) $c = 1$. Vezměme $\overset{\varepsilon > 0}{h} \in C_c^+(G)$ $h(x) = h(x^{-1})$, $\operatorname{supp} h \subseteq V$, kde V je takové, že $|\tilde{\Delta}(x) - 1| < \varepsilon$ $\forall x \in V$ a V sym.
(Plyne ze spojitosti $\tilde{\Delta}$ a $\tilde{\Delta}(e) = 1$.)

symetrii jako v dk. Haarf Weile.

$\int h(x) d\mu_G^{-1}(x) \underset{\text{def } \mu_G^{-1}}{=} \int h(x^{-1}) d\mu_G^{(x)} \underset{\text{def } h}{=} \int h(x)\, d\mu_G(x)$

$|(c-1)\int h^{(x)} d\mu_G| = |c\int h^{(x)} d\mu_G^{-1} - \int h^{(x)} d\mu_G^{-1}| = |\int h^{(x)}\tilde{\Delta}^{(x)} d\mu_G - \int h\, d\mu_G|$

$\leq |\int h(\tilde{\Delta} - 1) d\mu_G| \leq \varepsilon \int h\, d\mu_G$ $\forall \varepsilon$ $\Rightarrow c = 1$!

Pozn.: Identity 1 a 2 si zaslouží pozornosti. Rád bych je zkoušel. Jde vlastně o substituci v „Haarově integrálu": pravá inv. $\Rightarrow \Delta(y^{-1})$

inverze $\Rightarrow \Delta(x)$ do integrandu.

Nyní již dokažme 4:

1. Involutivnost: $f^{**}(g) = (f^*)^*(g) = \Delta_G(g^{-1})\,\overline{f^*(g^{-1})} =$

$$= \Delta_G(g^{-1})\,\overline{\Delta_G(g)\,\overline{f(g)}} = \Delta_G(g)\Delta_G(g^{-1})\,f(g) =$$

$$= \Delta_G(e)\,f(g) = f(g) \qquad [2\ \Delta_G \text{ je homom., víme}]$$

2. Antihomom: $f^* * h^* = (f * h)^*$

a) $(f^* * h^*)(g) = \int f^*(y)\, h^*(y^{-1}g)\, d\mu_G(y) =$

$$= \int \Delta_G(y^{-1})\,\overline{f(y^{-1})}\;\Delta_G(g^{-1}y)\,\overline{h(g^{-1}y)}\, d\mu_G(y)$$

$$= \Delta_G(g^{-1})\,\overline{\int f(y^{-1})\, h(g^{-1}y)\, d\mu_G(y)}.$$

b) $(f * h)^*(g) = \left(\int f(y)\, h(y^{-1}g)\, d\mu_G(y)\right)^* =$

$$= \Delta_G(g^{-1})\,\overline{\int f(y^{-1})\, h(g^{-1}y)\, d\mu_G(y)}.$$

3. Isom. sami.

$(L^1(G), *, {}^*)$ se říká L^1-algebra grupy G. Je C^*- iff $G = \{e\}$!
Má „stejné" reprezentace jako G!! Asoc. algebra/$\mathbb{C}$.

Lemma: A kom. C^*-alg. Pak $\forall m \in \Delta_A$ $\forall a \in A$
$$m(a^*) = \overline{m(a)}$$

Dk.: Pp. $A \ni 1$. $a = \mathrm{Re}(a) + i\,\mathrm{Im}(a)$, $\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a+a^*)$

$\mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a-a^*)$. Re & Im symetrické.

Stačí $a = a^*$ (symetrické a). Ukážeme,

že $m(a) \in \mathbb{R}$. $m(a) =: x+iy$. $a_t := a+it \Rightarrow$
$m(a_t) = x+i(y+t) \Rightarrow |m(a_t)|^2 = |x+i(y+t)|^2 = x^2+(y+t)^2$. Avšak

$\|m\| \leq 1$ (viz dříve), a tak $|m(a_t)|^2 \leq \|a_t a_t^*\| \underset{\uparrow}{=} \|a+it\|^2 = \Rightarrow$
„hodnoty stavů" C^*-relace

$\Rightarrow = \|a^2+t^2\| \leq \|a\|^2 + t^2$

Celkem: $x^2+y^2+2yt \leq \|a\|^2$ $\forall t \Rightarrow y = 0$. $\square$

Pozn.: 1. Prvkům $a = a^*$ se říká symetrické (nebo samoadjungované, nebo hermitovský symetrické. Posledním způsobem, pokud se chce zdůraznit to, že $a \in A$ a A je algebra nad $\mathbb{C}$).

2. $a^*a = 1 \Rightarrow a^* = a^{-1} \Rightarrow aa^* = 1$ slují unitární.

3. $aa^* = a^*a$ normální.

4. Reformulace lemmatu: $\widehat{a^*}(m) = \hat{a}(\overline{m}) = \overline{\hat{a}}(m)$.

Věta (Gelfand–Naimark): A komutativní C^*-algebra.

Pak Gelfandovo zobrazení $a \in A \mapsto \hat{a} \in \Delta_A$ je izometrický $*$-izomorfizmus $\boxed{A \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_0(\Delta_A)}$.

$\boxed{\|\hat{a}\|_{\mathcal{C}_0(\Delta_A)} = \|a\|_A}$ & $\boxed{\widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}}$.

Navíc Δ_A je kpt. iff A je unitální. Pak $A \cong \mathcal{C}(\Delta_A)$.

Dk.: Použijeme Stone-Weierstrassovu větu:

X lok. kompaktní Hausdorffův prostor, $A \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ (Banach. podalgebra), že

1. $\forall x \neq y \in X \ \exists f \in A \quad f(x) \neq f(y)$ (A separuje)
2. $\forall x \in X \ \exists f \quad f(x) \neq 0$
3. A je uzavřená na komplexní konjugaci.

Pak A je hustá v $C_0(X)$.

$\hat{A} := \{\hat{a},\ a \in A\} \subseteq \mathcal{C}_0(\Delta_A)$, Δ_A lok. komp. Hausd.

(víme z věty o Gelf. zobr.).

- Buď $b = b^*$. Pak dle věty o spektr. poloměru

$$r(b) = \lim_n \|b^n\|_A^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|b^{2^n}\|_A^{\frac{1}{2^n}} =$$
$$= \lim_n \|(b^*b)^n\|_A^{\frac{1}{2^n}} = \lim_n \left(\|b\|_A^{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}} = \|b\|_A.$$

- • $\|\hat{a}\|^2_{C_0(\Delta_A)} \overset{C^*\text{-identita}}{=} \|\overline{\hat{a}}\,\hat{a}\|_{C_0(\Delta_A)} \overset{\text{Bod 4 předch. poznámky}}{=} \|\widehat{a^*}\hat{a}\| = \|\widehat{a^*a}\|_{C_0(\Delta_A)} =$ (G. zobr. je homom. (věta o G. zobr.))

a^*a je sym. $\Rightarrow$ •

$= r(a^*a) = \|a^*a\|_A \overset{C^*\text{-id.}}{=} \|a\|^2_A$

Gelfandovo zobrazení je izometrie.

Izometrie s hustým obrazem je na. Stačí tedy ověřit podm. S-W-věty.

(7)

ad 1 $\hat{a}(m_1) = \hat{a}(m_2)\ \forall a \in A \Leftrightarrow m_1(a) = m_2(a) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

ad 2 $\forall m \in \Delta_A \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow \exists a \in A\ \ m(a) = \underline{\hat{a}}(m) \neq 0$.

ad 3 $\hat{a} \in \mathcal{A}$ $\square$

Pozn.: Možná úvaha. Obraz izometrie úplného TVS je úplný ⇒ uzavřený. Uzavřený a hustý = celý (std.).

Pozn.: 1. Zjistili jsme důl. vztah, a sice $r(a) = \|a\|_A$ v případě $a = a^*$ a C^*-algebry. (Pokud a lib. pak to platí také.)

Pozn.: 1. $\|a\|^2 \leq \|aa^*\| \wedge$ Banachova : $\|a\|^2 = \|a^*a\|$, tj. C^*-alg.

2. $\underset{C^*\text{-ner.}}{\|a\|\|a\| \leq} \|aa^*\| \underset{\text{Banach}}{\leq} \|a\|\|a^*\| \Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\|$

Banachova-*.
„symetrizace": $\|a^*\| \leq \|a\|$

3. $\left.\begin{array}{l} (A, *, \|\ \|)\ \ \text{*-involuce} \\ \|aa^*\| \leq \|a\|^2 \\ \text{Banachova} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Banach} * \Rightarrow C^*\text{-alg}.$