Matematická analýza - 6. domácí úkol

Martin Vavřík

2. ledna 2021

Úkol č.1: Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.

Řešení: Nejprve určíme jednotlivé derivace:

$$f'(x) = (2-2x)e^{2x-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{2x-x^2} + (2-2x)^2e^{2x-x^2}$$

$$f'''(x) = -2(2-2x)e^{2x-x^2} + 2(2-2x)\cdot(-2)e^{2x-x^2} + (2-2x)^3e^{2x-x^2}$$

Určíme hodnoty derivací v bodě 0:

$$f'(0) = (2-2\cdot 0)e^{2\cdot 0-0^2} = 2$$

$$f''(0) = -2e^{2\cdot 0-0^2} + (2-2\cdot 0)^2e^{2\cdot 0-0^2} = -2+4 = 2$$

$$f'''(0) = -2(2-2\cdot 0)e^{2\cdot 0-0^2} + 2(2-2\cdot 0)\cdot(-2)e^{2\cdot 0-0^2} + (2-2\cdot 0)^3e^{2\cdot 0-0^2} = -2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot(-2) + 2^3 = -4$$

Nyní už můžeme psát Taylorův polynom:

$$T_3^{f,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

Úkol č.2: Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

Řešení: Nejprve najdeme definiční obor. Jmenovatel je vždy kladný, arkus kosinus je definován na $\langle -1, 1\rangle$:

$$-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$$

$$-x^2 - 1 \leq 2x \leq x^2 + 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 \leq 0 \leq x^2 - 2x + 1$$

$$-(x+1)^2 \leq 0 \leq (x-1)^2$$

Druhá mocnina je nezáporná, definiční obor funkce f jsou tedy všechna reálná čísla $D_f = \mathbb{R}$. Funkce je spojitá na celém definičím oboru. Určíme limity v hraničních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to 0\pm} \arccos\left(\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = \lim_{x\to 0\pm} \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0\pm} \arccos\left(\frac{2\cdot 0}{1+0^2}\right) = \lim_{x\to 0\pm} \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Funkce není sudá ani lichá $f(-x) \equiv \pi - f(x)$ ani periodická. Funkci zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}}} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \cdot \left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right| = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)|x^2-1|} = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{x^2+1},\ x \neq \pm 1$$

V bodech ± 1 derivace neexistuje (důkaz z limity?). Určíme intervaly monotonie:

dukaz z definice der. pomoci limity

$$f'(x) = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{x^2+1} > 0$$

i lokalni

$$x^2 - 1 > 0$$

Funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ a klesající na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Derivace je všude nenulová, podezřelé body na extrémy $x = \pm 1$. V bodě -1 je globální maximum $f(-1) = \pi$, v bodě 1 globální minimum $f(1) = 0$ (podle limit v nekonečnu a intervalů monotonie). Obor hodnot $H_f = \langle 0, \pi\rangle$. Nulový bod $x = 1$ (zároveň globální minimum). Spočítáme druhou derivaci:

$$f''(x) = -2x\frac{2\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{4x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Určíme intervaly, kde je funkce konkávní a konvexní:

$$f''(x) = -\frac{4x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{(x^2+1)^2} > 0,\ x \neq \pm 1$$

$$-4x\,\mathrm{sgn}(x^2-1) > 0$$

$$-4x(x^2-1) > 0$$

$$-4x(x-1)(x+1) > 0$$

Funkce je konvexní na intervalech $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ a konkávní na intervalech $(-1,0)$, $(1,\infty)$. V bodě 0 je inflexní bod. Zbývá nám nalézt asymptoty:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)}{x} = \lim_{x\to 0\pm} x \arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0$$

Funkce má jedinou asymptotu $y = \frac{\pi}{2}$

Nacrtek.