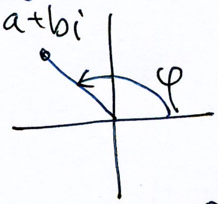
A) Komplexní čísla

- $a+bi$, a, b reálná čísla
- Součet $(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
- Součin $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i$
  $+ b_1 b_2 i^2 = \left| \underline{\underline{i^2=-1}} \right| = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
- $z = a+bi$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ <u>velikost kompl. čísla</u>
  (absolutní hodnota)
- $\forall$ pro všechna
  $\exists$ existuje
  $\exists!$ právě jedno
- $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\ \exists!\, r>0\ \exists!\, \varphi \in \langle 0, 2\pi)\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
  $r = |z|$,



- $z = a+bi$, $a = \mathrm{Re}(z)$ <u>reálná část</u>
  $b = \mathrm{Im}(z)$ <u>imaginární část</u>
- $\bar{z} = a-bi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$ <u>kompl. sdružené</u>
- <u>Moivrova věta</u>: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow$
  $\Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
- Symboly: $\mathbb{C}$ komplexní čísla
  $\mathbb{R}$ reálná čísla

1. Reálná a imag část $z=\frac{3}{2+3i}=\frac{3(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=$

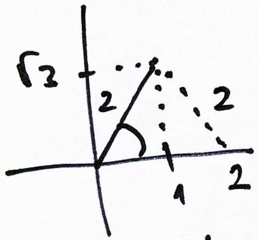
$z\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$

vynásob sdruženým (rozšiř)

$=\frac{6-9i}{13}=\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i$

$\mathrm{Re}\,z=\frac{6}{13}$, $\mathrm{Im}\,z=-\frac{9}{13}$

2. $z=(1+i\sqrt{3})^3=?$ $|z|=\sqrt{1+3}=2$, $\varphi=?$



$\Rightarrow \varphi=60^\circ=\frac{\pi}{3}$; nebo $\cos\varphi=\frac{1}{2}$

Obecně: $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$(1+\sqrt{3}i)^3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3=8(\cos\pi+i\sin\pi)=-8$

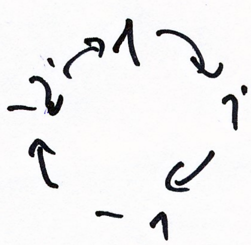
Př.: $\frac{2}{1-3i}$ Re + Im

1a) 2b) 3a) 3e)

Řešení:
1a) $\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{1+9}=\underbrace{\frac{1}{5}}_{Re}+\underbrace{\frac{2}{5}}_{Im}i$

2b) $1+i^{123}=1+i^{120}\cdot i^3=1+\underbrace{i^{4\cdot 30}}_{1}(-i)=1-i$

$$\boxed{\begin{aligned} i^0&=1\\ i^1&=i\\ i^2&=-1\\ i^3&=-i\end{aligned}}$$



- <u>Binomické rovnice</u> : $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$, $z = ?$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z^n = a \Rightarrow |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

a) $|z| = \sqrt[n]{|a|}$

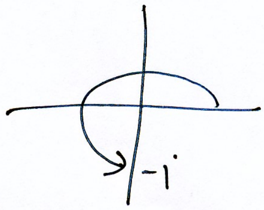
$\Rightarrow$ b) $\cos n\varphi = \cos\alpha$ a $\sin n\varphi = \sin\alpha$

$\Rightarrow n\varphi = \alpha + 2k\pi$ nebo $n\varphi = \pi - \alpha + 2k\pi$

$$\Rightarrow z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \dots, n-1$$

Př.: $x^6 = -i = a$, $|a| = 1$, $\alpha = \frac{3}{2}\pi$

$a = 0 - 1i$

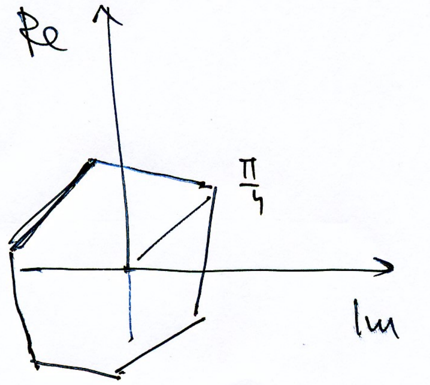


$\cos\alpha = \frac{0}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\frac{3}{2}\pi$

$\sin\alpha = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow \frac{3}{2}\pi\frac{1}{6} = \frac{\pi}{4}$

$$x = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\right), \ k = 0, 1, \dots, 5$$

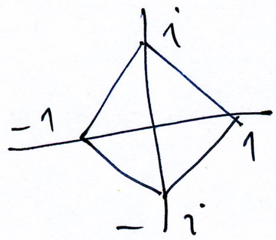


Př.: $x^4 = 1$

4.1

$x^4 = 1 \quad a = 1, \ |a| = 1, \ \varphi = 0$

$x = \sqrt[4]{|a|}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right), \ k = 0,1,2,3$



$x_k = 1, i, -1, -i$

Nerovnosti:

4.2

Př.:

$|x+1| + |x-1| \geq 2$

$-1, 1$

$$|a| = \begin{cases} a & a>0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 1)$	$\langle 1, \infty)$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

a) $-x-1+(-x)+1 \geq 2$ na $(-\infty, -1\rangle$.

$-2x \geq 2$

$-1 \geq x$

$(-\infty, -1\rangle$

b) $x+1-x+1 \geq 2$ na $(-1, 1\rangle$

$2 \geq 2$

$(-1, 1\rangle$

c) $x+1+x-1 \geq 2$ na $(1, \infty)$.

$2x \geq 2$

$x \geq 1$

Řešení je $\mathbb{R}$ (řící, ~~že~~ to je zřejmé ... jak!)

B) Výroky

A, B, C … „atomický" výrok ⟶ Složené výroky: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$

neplatí A, A a B, A nebo B, Když a, pak b, A, právě tehdy když B;

někdy $\boxed{\text{non } A}$

Dále: (A) závorky. tj. negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence

Pravdivostní hodnoty: $\{0, 1\}$, 1 pravda, 0 nepravda

Př.: $(A \Leftrightarrow B) \wedge C$, $A \wedge (\neg B)$, píšeme $A \wedge \neg B$.
$(A \wedge B) \Rightarrow C$ …

Def: $A \wedge B$ je pravdivý, právě tehdy když A je pravdivý i B je pravdivý. NEBO:

Tab.:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

konjunkce

Def:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tab.:

Def:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

disjunkce

[Není vylučovací nebo. Vylučovací nebo:]

1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Implikace : $\Rightarrow$, když, pak; pokud, pak; jestliže, pak. Slovo pak lze vynechat.

Def: $A \Rightarrow B$ je pravdivý tehdy a jen tehdy, pokud A je nepravdivý nebo B je pravdivý.

$p(A) \leq p(B)$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Př.: Pokud prší, je mokro

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	$\boxed{0}$
0	1	$\boxed{1}$
0	0	1

Pokud je mokro, prší.

A	B	$B \Rightarrow A$
1	1	1
1	0	$\boxed{1}$
0	1	$\boxed{0}$
0	0	1

$$A \Rightarrow B \neq B \Rightarrow A$$

Ekvivalence : $\Leftrightarrow$ právě tehdy, když

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Def: Výrok je pravdivý $\Leftrightarrow$ pravdivostní hodnota = 1 pro všechny ohodnocení

Př.: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{=C} \wedge \underbrace{(B \Rightarrow A)}_{=D}]}_{E}$ $\underbrace{A \Leftrightarrow B}_{=F}$

A	B	A ⇒ B	B ⇒ A	C ∧ D	A ⇔ B	E ⇔ F
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Př.: 6g $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ pro presnost dodavam zav.

A	B	A ⇒ B	¬B	¬A	¬B ⇒ ¬A
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$A \Rightarrow B$ implikace

$\neg B \Rightarrow \neg A$ obměna implikace

Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

A	B	A ⇒ B	¬(A ⇒ B)	¬B	A ∧ ¬B
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0

Kvantifikátory

x proměnná, $v(x)$ výrok s proměnnou (výroková formule).

Př.: $v(x)$ = x je člověk, $v(x)$ = x má rád slunce, $v(x)$ = x je červ.

$(\forall x)(v(x)) \equiv$ Pro všechna x platí $v(x)$

$(\exists x)(v(x)) \equiv$ Existuje x, že platí $v(x)$.

Častěji: $(\forall x)(v(x)) \rightsquigarrow (\forall x \in M)(v(x))$

je prvkem

Negace: $(\forall x)(v(x)) \overset{\neg}{\rightsquigarrow} (\exists x)(\neg v(x))$

$(\exists x)(v(x)) \overset{\neg}{\rightsquigarrow} (\forall x)(\neg v(x))$

Př.: $v(x)$ = x je smrtelý!

$(\forall x)(v(x))$ = pro všechna x platí, že x je smrtelý!

Negace = existuje x, že x je nesmrtelý!

Př.: $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Negace a co je pravdivý výrok?

$\forall x \in \mathbb{R} : \cos x \neq \sqrt{1-\sin^2 x}$

Nepravdivý!: $x = 0$ $\quad \cos 0 = 1$

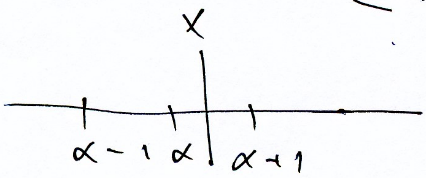
$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-0} = 1$

Platí? $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in (a, a+\varepsilon):$

$$x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1$$

$$x \in (a, a+\varepsilon) \iff a < x < a+\varepsilon$$

$$|x-\alpha| < 1 \iff \alpha - 1 < x < \alpha + 1$$
$$\iff x \in (\alpha-1, \alpha+1)$$



Zvolíme $\varepsilon = 1$, $\alpha = a$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon = 1\ \exists \alpha = a\ \forall x \in (a, a+1):$

$x \in (a, a+1) \iff x \in (a-1, a+1)$ zřejmě.

D.cv. $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in (a, a+\varepsilon):$

$$x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1$$

C) Množiny

$x \in A$ x je prvkem A

$A \subseteq B \iff \forall x\ x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \cap B = \{x,\ x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x,\ x \in A \vee x \in B\}$

$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$

Př.: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ Dokažte.

Dk.: $x\in(A\cup B)\cap C \iff x\in A\cup B \wedge x\in C$

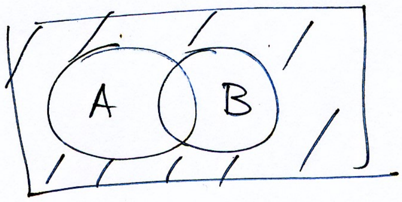
$\iff (x\in A \vee x\in B)\wedge x\in C \iff$

$\iff (x\in A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\iff x\in(A\cap C)\cup(B\cap C).$ $\square$

Použili jsme: $(A\vee B)\wedge C \iff (A\wedge C)\vee(B\wedge C).$

Př.: $C\setminus A\cup B=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$



Formálně: $x\in C\setminus A\cup B \iff x\in C\wedge x\notin A\cup B$

$\iff x\in C\wedge(x\notin A\wedge x\notin B) \iff$

$x\in C\wedge x\notin A\wedge x\notin B$

$x\in C\setminus A\wedge x\in C\setminus B \iff x\in C\wedge x\notin A\wedge$

$\wedge x\in C\wedge x\notin B \iff x\in C\wedge x\notin A\wedge x\notin B.$