1. Najděte lokální extrémy

$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$, $D_f = \mathbb{R}$ $x^{\frac{1}{3}}$ máme def. na celém $\mathbb{R}$

spojitá na celém $\mathbb{R}$.   (Je i přístup def. x^q jen na $\mathbb{R}_0^+$)

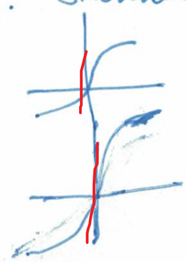
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(1-x)^{2/3} - \frac{2}{3}x^{1/3}(1-x)^{-1/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(1-x)-2x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1-3x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}}.$$

Podezřelé:
- Stacionární bod $(\overset{\text{def}}{=} f'(c)=0)$: $x = \frac{1}{3}$
- Bod $\nexists$ vlastní derivace: 0 a 1. De facto ale víme jen, že nefungují vzorečky. Skutečně neexistují derivace v 0 & 1?

$f(x)$ u nuly $x^{1/3}$ neexistuje

u 1 $y^{2/3}$ neexistuje   } vidím



[Přesně u nuly: $\lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}(1-h)^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-2/3}\underbrace{(1-h)^{2/3}}_{1} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$

U 1 analogicky.]

- Znaménka f' na $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},1)$ $(1,\infty)$

$x^{2/3} \geq 0$

	$(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},1)$	$(1,\infty)$
$(1-x)^{\frac{1}{3}}$	+ +	+	−
$1-3x$	+ +	−	−
f'	+ +	−	+
	roste, roste	lok max	lok min

Ani { /°\ }, ani { \°/ } nenastane, neboť f je spojitá. Je tedy

2. Dokažte nerovnost

$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$; $x, y \ge 0$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Youngova nerovnost

$f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$; $f'(x) = y - x^{p-1}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$, f spoj.; f' $\exists$ na $\mathbb{R}_0^+$, $f'(x_0) = 0 \iff x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$

	$(0, x_0)$	(x_0, ∞)
f'	$+$	$-$

V x_0 je lokální maximum; maximum je globální.

Tj.: $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = y^{\frac{1}{p-1}} y - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = y^{\frac{1+p-1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} =$

maximum

$= y^{\frac{p}{p-1}} \cdot \left(\frac{p-1}{p}\right) \ge xy - \frac{x^p}{p}$ $\forall x, y \ge 0$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \boxed{q = \frac{p}{p-1}}$: $\left[\frac{y^q}{q} \ge xy - \frac{x^p}{p}\right] \iff$

$p + q = pq$

$$\boxed{\frac{y^q}{q} + \frac{x^p}{p} \ge xy}$$

Lépe: nejdřív 3., pak 2.

3. Dokažte $e^x > x + 1$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (v 0 rovnost triv.)

$f(x) = e^x - x - 1$ $\quad D_f = \mathbb{R}$, spoj. na $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f'	$-$	$+$

f má lokální minimum v $x = 0$.

Minimum je ostré (z def.): $f' < 0$ na $(-\infty, 0)$, $f' > 0$ na $(0, \infty)$.

Minimum je globální (z def.).

$f(0) = e^0 - 1 = 0$: $f(x) \ge f(0)$ $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$

$f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ostrost.

tj. $e^x - x - 1 > 0$ na $D_f \setminus \{0\}$

$$\boxed{e^x > x + 1}$$

4. Globální extrémy $f(x)=x^2-4x+6$ na $[-3,10]$.

$D_f=[-3,10]$, f spoj. na $[-3,10]$ (v -3 zprava, v 10 zleva)

stac. body $f'(x)=\underline{2x-4}=0 \iff x=2$

body nespoj.: $\emptyset$

body $\nexists f'$ vlastní: $\emptyset$

krajní body: $-3, 10$.

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
f'	$-$	$+$

Spojitá:  $\Rightarrow x=2$ lok. minimum.

Zřejmě glob. minimum. (z def! Proč? formalis-

tický: $f(x)\geq f(2)$? $x \boxed{\leq} 2 \Rightarrow f(x) \boxed{\geq} f(2)$ klesá vím z $f'<0$

$x \boxed{\geq} 2 \Rightarrow f(x) \boxed{\geq} f(2)$ roste vím z $f'>0$

zobr. jasné.

Celkem: v 2 je glob. minimum.

Globální maximum: $\exists$ (spoj. na uzavřeném!)

důl. a dk.-složitá věta zásadní ve vývoji matematiky

a) v lok. maximu, již však $\nexists$

b) v krajních bodech D_f nebo : $-3, 10$

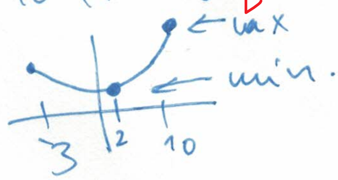
v krajních bodech spojitosti $-3, 10$

v krajních bodech $\exists$ vlastní derivace : $-3, 10$

nebo v krajních bodech

$(-3)^2+12+6=27$

$(10)^2-40+6=66 \Rightarrow$ glob. max v $x=10$, a sice 66.



5. $f(x)=xe^{-\frac{x}{100}}$ glob. extr. na $(0,\infty)$.

(jinak $(-\infty,\infty)$)

$D_f=(0,\infty)$ ze zadání

spoj. na $(0,\infty)$

$D_{f'}=(0,\infty)$

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{100}} + x\left(-\frac{1}{100}\right)e^{-\frac{x}{100}} = 0$$

$-100 + x = 0 \iff x = 100$, stac. bod

	$(0,100)$	$(100,\infty)$
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

(podezřelý z lok. extrému)

s poj.: (v $x=100$)

Lokální maximum v $x = 100$, lok. min. $\nexists$

gl. max. $\exists$ (v bode lok. max.)

Body nespoj. $\emptyset$

Body $\nexists$ 1. der. $\emptyset$

Stc. body $x = 100$, $f(x) = 100e^{-1}$

„Krajní body": $x = 0$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{100}}} \overset{\text{l'Hosp}}{=} \lim \frac{1}{\frac{1}{100}e^{\frac{x}{100}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Nebo růst. řada $x \ll \left(e^{\frac{1}{100}}\right)^x$ <1

Celkem: glob. minimum $\emptyset$, největší glob. maximum v $x = 100$

[Na $[0,\infty)$ je glob. minimum v $x = 0$.]

6. Lokální a globální extrémy $f(x) = |x^2+x-2| - |x^2-3x+2|$ na $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$, f spojitá.

$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

I:	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
x^2+x-2	$+$	$-$	$+$	$+$
x^2-3x+2	$+$	$+$	$-$	$+$

a) $f(x) = 4x-4$ ✓

b) $f(x) = -2x^2+2x$ ✓

c) $f(x) = 2x^2-2x$ ✓

d) $f(x) = 4x-4$

$\lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\infty \Rightarrow$ nemá glob. extr.

Lokální:

a) Podezř.: -2

b) Podezř.: $-2, 1$, $-4x+2=0 \iff x = \frac{1}{2}$

c) $1, 2$, $4x-2=0 \iff x = \frac{1}{2} \notin I$

d) 2

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
f'	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

Lok. max. v $\frac{1}{2}$, lok. min. v 1.

$D_f = (-3,3)$ → Pro stejnou f, ale s omezenym Df na Df=(-3,3) urceno na whiteboardu. Staci dpoocist hodnoty v krajnich bodech, jez pribyly, tj. +/-3

Vyšetřování průběhu

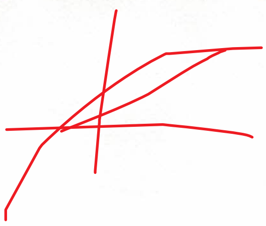
1. D_f, obor spoj., limity v bodech nespoj. a hraničních/krajních bodech D_f.
2. Spec. vlastn.: sudost/lichost, periodicita
3. Intervaly monotonie f'
4. Body lok. a glob. extrémů
5. Obor hodnot (H_f, R_f). Omezenost
6. Nulové body, jde-li.
7. konk./konv., infl.
8. Asymptoty
9. Náčrtek

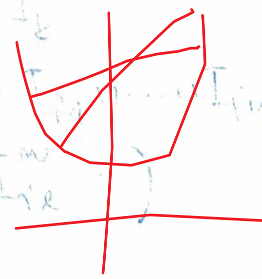
Doplnění vět z minula: $f''>0 \Rightarrow$ ryze konv.

$f''<0 \Rightarrow$ ryze konk.

$f''\geq 0 \Rightarrow$ konv.

$f''\leq 0 \Rightarrow$ konk.





Pokud $\exists$ asymptota $Ax+B$, pak $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$B = \lim (f(x)-Ax)$. Pak bych měl zkontrolovat

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-Ax-B)=0$. Analog. pro $-\infty$.

Př.: Vyšetřete průběh $f(x)=e^{-x^2}$

1. $D_f=\mathbb{R}$, spojitá na $\mathbb{R}$ (slož. spoj.!).

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}= e^{-\infty}=0$ (vnější řády)

VOS $y=-x^2$

2. Je sudá. Není lichá. Není periodická.

3. $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
f'	+	$\cancel{+}$

f roste na $(-\infty,0\rangle$

f klesá na $\langle 0,\infty)$

$\Rightarrow$ v 0 lok. maximum.

4. v 0 lok. max.

Lok. minimum není.

Glob. minimum: není: $f(x)\cancel{\geq}0 \wedge f\to 0, x\to\pm\infty$

Glob. maximum: lok max $f(x)=1$, $x=0$

[Dk. opět třiva def.: $x\leq 0$ $f(x)\leq 1$ roste

$x\geq 0$ $f(x)\leq 1$ klesá

$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\leq 1$]

5. $H_f=(0,1\rangle$ (spojitá, nabývá mezihodnot na int.)

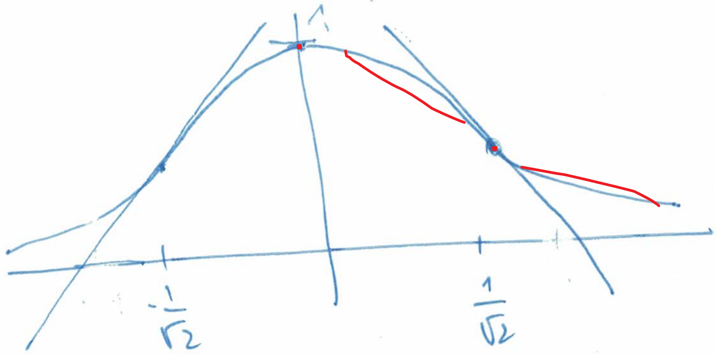
6. Nulové body: $\emptyset$

7. $f''(x)=-2e^{-x^2}-2x(-2x)e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$2x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt2})$	$(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$	$(\frac{1}{\sqrt2},\infty)$
f''	+	−	+
f	konv	konk.	konv

infl. infl.



8. Asymptoty: $x \to \infty \quad y = 0$
$x \to -\infty \quad y = 0$

Př.: Vyšetři $f(x) = \operatorname{sh} x$ snadne. doporucuji pro "zakladni porozumeni"

1. $D_f = \mathbb{R}$, spoj. na $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. lichá: $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$.

Není per. (bez dk.). Není sudá.

3. $f'(x) = \cosh x \quad = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 0 \;/ e^x \Leftrightarrow e^{2x} = -1 \Rightarrow \emptyset$

cosh je součet kladných $\Rightarrow$ kladná $\Rightarrow$

f je rostoucí

4. Nemá lok. min.
—||— max.
Glob: v bodech lok. extr. nebo v krajních bodech
$\emptyset \qquad \emptyset$

Nejsou.

5. $H_f = (-\infty, \infty)$ (z limit $f(x)$ a spoj. f)

6. Nulové body $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\operatorname{sh}(0) = 0$.

7. $f''(x) = \operatorname{sh} x$ $\quad f''(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le 0$

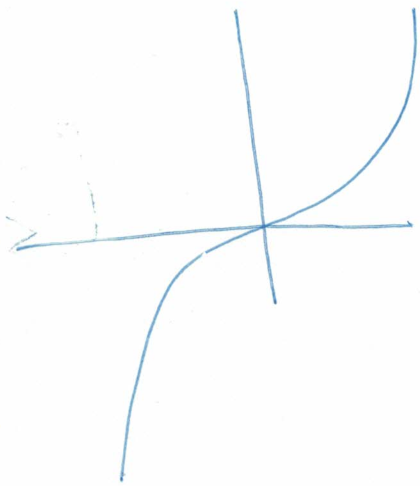
$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$

konv. na $\langle 0, \infty)$

konk. na $(-\infty, 0\rangle$

∇ Do konkávy kávn nenálezí — pomůcka.

Graf



8. Asymptoty nejsou.

Př.: Vyšetři $f(x) = \arcsin \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. $D(\arcsin) = [-1, 1]$

$$-1 \le \frac{x^2-1}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow -x^2-1 \overset{a)}{\le} x^2-1 \overset{b)}{\le} x^2+1$$

a) $0 \le x^2$ ✓ $\qquad$ b) $-1 \le 1$ ✓

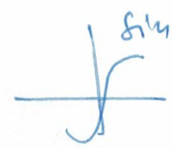
Dál $x^2+1 \neq 0$ nikdy na $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$;

Spoj. x^2-1, x^2+1 spoj, $x^2+1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}$ spoj.

arcsin spoj. Slož. spoj. a spoj. je spojitá.

Obor spojitosti $\mathbb{R}$.



$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \arcsin 1^- = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \arcsin 1^- = \frac{\pi}{2}$$

2.

sudá: $f(x)=f(-x)$.

Není lichá.

Není period.

10

3. $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{|x^2+1|}{\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}}\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)\sqrt{4x^2}}\ \overset{x\neq 0}{=}$$

$$=2\,\mathrm{sgn}(x)\frac{1}{x^2+1},\ \underline{x\neq 0}.\qquad \mathrm{sgn}\,x:=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}.$$

Obor platnosti výpočtu: arcsin' má def. jen na $\langle -1,1\rangle$, přičemž v -1 zprava a v 1 zleva.

Vlastní jen na $(-1,1)$. $-1<\frac{x^2-1}{x^2+1}<1$ ověřen z výpočtu

vyjde až na bod $\underline{x=0}$ (případ a))

• Je derivace f, fce f, vlastní v $x=0$? [To to potřebuji pro věty.] $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\frac{h^2-1}{h^2+1}-\arcsin(-1)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(\frac{h^2-1}{h^2+1}\right)+\frac{\pi}{2}}{h}=\ \cdots$$

Na whiteboard nebylo, spoctete l' Hosp. Derivace je urcena vyse, bude treba rozlisit 0^+ a 0^- : 0^- -2, 0^+, vpravo, +2.

4. $f'(x)=0$. (Stacionární: $f'(x_0)=0$)

Stacion. body: $\emptyset$

Krajní body D_f:

Krajní body spoj. f: $\Big\}\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$=\frac{\pi}{2}$.

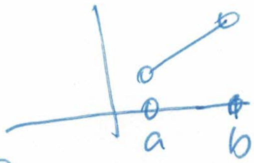
$f'>0$ pro $x>0$

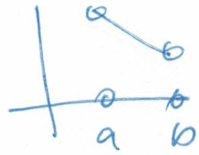
$f'<0$ pro $x<0$

Lok. extrémy max:
glob. extrémy max.

Pozn.: [a,b), [a,b), (a,b], [a,b]

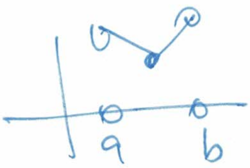
α) (a,b)





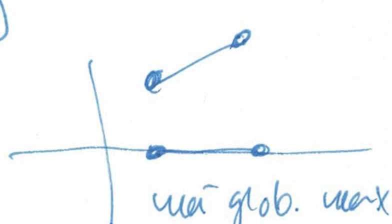
Cela struktura je z hlediska formulace slozita - velke mnozstvi pripadu, ale z obrazku srozumitelna.

NEMÁ lok. min
má lok. max.
má glob. max.
nemá glob. min.

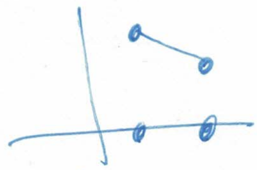


nemá gl. max
—||— gl. min.
—||— lok max.
—||— lok. min.

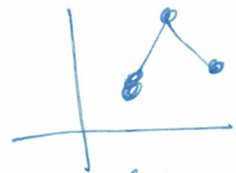
β) [a,b]



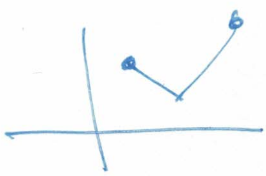
má glob. max.
má glob. min
ne má lok. max.
ne má lok. min.



ne má lok min
ne —||— max
má glob min
má glob max.



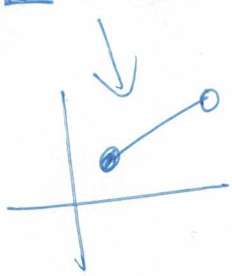
ne má lok. min.
má lok. max.
má glob. max.
má glob. min.



analogicky

Tyto doplneni ne jsem pridal na zaklade poznamek predneasejiciho z jeho webu. Pozadovalo se, aby lok. minima/maxima byla pouze v bodech, jez jsou stredy okoli a to takovych okoli, kde je fce definovana

γ) (a,b], δ) [a,b) analogicky



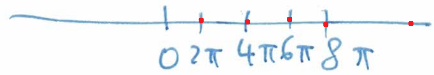
ne má lok. min
nemá lok. max
MÁ glob. min
nemá glob. max. !!

Nestrilel bych z toho.

Celkem tedy: 16 případů. Nawcobralkem nevěříme neuvést, nedesání → 32 případů (důležité pro vyzrálost).

Nezapomente, ze lokalni extremy musi byt v bodech Df (intuitivne jasne), ale navic takovych, jez maji okoli U, ktere je cele v Df (zrejme, kdyz si zopakujete definici lokalniho extremu). Rikame nekdy ve vnitrnich bodech.

Př. Vyšetři $f(x) = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}|$



1. $\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x \neq 2\pi + 4k\pi$

$\operatorname{tg}\frac{x}{4} \neq 0$ $\quad \frac{x}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq 4k\pi$

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$$

Obor spoj. = D_f (ln spoj., $|\ |$ spoj., tg $(\ )$ spoj., $\frac{x}{4}$ spoj.)

$\lim_{x\to 4k\pi} \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}| = -\infty$ $\quad (\ln 0^+)$

$\lim_{x\to 4k\pi+2\pi} \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}| = +\infty$ $\quad (\ln +\infty)$

2. $f(-x) = \ln|\operatorname{tg}(-\frac{x}{4})| = \ln|-\operatorname{tg}(\frac{x}{4})| = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}| = f(x)$

sudá

4π-periodická. Proč?

$f(x+4k\pi) = \ln|\operatorname{tg}(x+k\pi)| = \ln|\operatorname{tg} x| = f(x)$

3. Stačí vyšetřovat na $(0,2\pi) \cup (2\pi, 4\pi)$.

Na $(0,2\pi)$: $f(x) = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{4})$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} > 0$

$(2\pi, 4\pi)$: $f(x) = \ln(-\operatorname{tg}\frac{x}{4})$ $\quad f'(x) = \frac{1}{-\operatorname{tg}\frac{x}{4}} (-1) \frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} \frac{1}{4} < 0$

Na $(4k\pi, 4k\pi+2\pi)$ roste.

$(4k\pi+2\pi, 4k\pi+4\pi)$ klesá.

4. Extrémy nejsou: Stac. body $\emptyset$

Lok: Roste klesá, ale $4k\pi+2\pi \notin D_f$

Glob: limity v krajních bodech $\pm\infty$ ⇒ nejsou glob. extr.

13

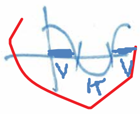
5. Z limit v ① a spojitosti $H_f = \mathbb{R}$

Není omezená.

6. Nul: $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = \pm 1 \quad (2k+1)\pi \quad \left[\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1\right]$

7. $f'' = \left(\dfrac{1}{\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}\cdot\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{1}{4}\right)' = \left(\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}\,\dfrac{1}{2}\right)' =$

$= \left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\,\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{-\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$

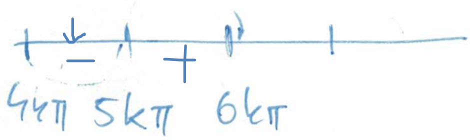
konv. $V_1 > 0 \iff \cos\frac{x}{2} < 0$  $\iff x \in \langle(4k+1)\pi, (4k+2)\pi\rangle$

a $((4k+2)\pi, (4k+3)\pi\rangle$

konk. $K_1 < 0 \iff \cos\frac{x}{2} > 0 \iff x \in (4k\pi, (4k+1)\pi\rangle$

a $\langle 4k+3 \quad 4k+4)\pi$

inflexní $x = (2k+1)\pi$.



8. Asympt.: if existují $A = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{4}|}{x}$ ∄, $x = 2k\pi^+$

Heine

$\lim\limits_{2k\pi^+}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2} = 0 \vee \infty$

$\ln 0^+ = -\infty$

$\ln\infty = \infty$

$\Rightarrow$ ∄

9.