

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 8
Derivace

Vypočtete derivace následujících funkcí a určete obor platnosti (tedy kde je definována funkce i její derivace):

1. $x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 6x + 3$ 2. $\frac{1}{3x+2}$

3. $\frac{x^2+3x-2}{x+1}$ 4. $(x^2 + 1) \ln x$

5. e^{4x-2} 6. e^{x^2-x+1}

7. 5^x 8. $\ln \sqrt{2x+3}$

9. $\sqrt{x^2-4}$ 10. $\log_{10}(x^2-1)$

11. $\ln\left(\frac{4-2x}{x+2}\right)$ 12. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

13. $\frac{e^{1+2x}}{x^2+3x+4}$ 14. $\frac{\ln(3-x)}{x^2+4}$

15. $\sqrt{x^2 + \frac{8}{x}}$ 16. $\frac{\sqrt{2+x}}{4x-2}$

17. $\frac{1}{x}$ 18. $(x^2 + 1)^4$

Řešení:

1. $4x^3 + 15x^2 - 4x - 6, x \in \mathbb{R}$

2. $\frac{-3}{(3x+2)^2}, x \neq -\frac{2}{3}$

3. $\frac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}, x \neq -1$

4. $2x \ln x + \frac{x^2+1}{x}, x \in \mathbb{R}_+$

5. $4e^{4x-2}, x \in \mathbb{R}$

6. $(2x-1)e^{x^2-x+1}, x \in \mathbb{R}$

7. $(\ln 5)5^x, x \in \mathbb{R}$; neboť $5^x = e^{(\ln 5)x}$ a tedy derivujeme jako složenou funkci

8. $\frac{1}{2x+3}, x > -\frac{3}{2}$; je možné derivovat jako funkci složenou ze tří funkcí $(\ln z, \sqrt{y}, 2x+3)$ nebo si uvědomit, že $\ln \sqrt{y} = \frac{1}{2} \ln y$

9. $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

10. $\frac{1}{\ln 10} \frac{2x}{x^2-1}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; neboť $\log_{10} y = \frac{\ln y}{\ln 10}$

11. $\frac{4}{x^2-4}$, $x \in (-2, 2)$; je možné derivovat jako funkci složenou ze dvou funkcí ($\ln y$, $\frac{4-2x}{x+2}$) nebo si uvědomit, že $\ln\left(\frac{4-2x}{x+2}\right) = \ln(4-2x) - \ln(x+2)$

12. $\frac{1-2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}$; derivujeme jako podíl, přičemž komplikovaný zlomek, který přitom vyjde, rozšíříme výrazem $\sqrt{x^2+1}$, čímž se zbavíme odmocnin v čitateli a celý čítenel se tak zjednoduší

13. $\frac{e^{1+2x}(2x^2+4x+5)}{(x^2+3x+4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\frac{-\frac{x^2+4}{3-x}-2x \ln(3-x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x(x-3) \ln(x-3)}{(x^2+4)^2(x-3)}$, $x \in (-\infty, 3)$

15. $\frac{x^3-4}{x^2 \sqrt{\frac{x^3+8}{x}}}$, $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

16. $\frac{-2x-9}{4(2x-1)^2 \sqrt{x+2}}$, $x \in (-2, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

17. $\frac{-1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lze vypočítat dvěma způsoby: jako derivaci podílu nebo jako derivaci x^{-1} , zkuste si oba

18. $8x(x^2+1)^3$, $x \in \mathbb{R}$; lze počítat dvěma způsoby: jako derivaci složené funkce (vnitřní je x^2+1 , vnější je čtvrtá mocnina) nebo si to roznásobit a derivovat člen po členu – co je elegantnější?

K dalšímu počítání: Na konci kapitoly 3 ze Žluté učebnice, str. 84 derivujte v úlohách 1 a 2 všechny funkce obsahující odmocniny, exponenciály, logaritmy (tedy nikoli sinus, cosinus apod.).