Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Beran Jaroš Prokop Zymin

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2022/23
Varianta A

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2n+1} + 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = (x^2+2x)\cdot e^{x^2-3x},$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = 2$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 2$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - 2x^2$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 100;\ x - y \le 2\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M spočtěte příslušnou hodnotu λ. Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

průsečíky $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$\longrightarrow x^2 + (x-2)^2 = 100$

$\hookrightarrow x_1 = -6 \rightarrow y_1 = -8 \rightarrow [-6; -8]$

$x_2 = 8 \rightarrow y = 6 \rightarrow [8; 6]$

$f(0;0) = 0$ $\qquad f(x,y) = y^2 - 2x^2$

$f(-2, -4) = 16 - 8 = 8$

$f(-10, 0) = -200 \rightarrow$ min

$f(0; 10) = 100 \rightarrow$ max

$f(8, 6) = 36 - 128 = -92$

$f(-6; -8) = 64 - 72 = -8$

6

$$L(x,y,\lambda) = y^2 - 2x^2 + \lambda(x^2+y^2-100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + 2\lambda x = 0 \rightarrow -2x + \lambda x = 0$$

$$x(\lambda-2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \longrightarrow y + \lambda y = 0$$

$$y(\lambda+1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-100 = 0 \rightarrow x^2+y^2 = 100$$

$$z \ \frac{\partial L}{\partial x}: \quad x(\lambda-2) = 0$$

$\hookrightarrow$ i) $x = 0 \rightarrow \underset{0}{x^2} + y^2 = 100$

$$y^2 = 100 \Rightarrow y = \pm 10$$

$$\rightarrow [0;10]_{\lambda=-1} \in M$$

$$[0;-10]_{\lambda=-1} \notin M$$

ii) $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

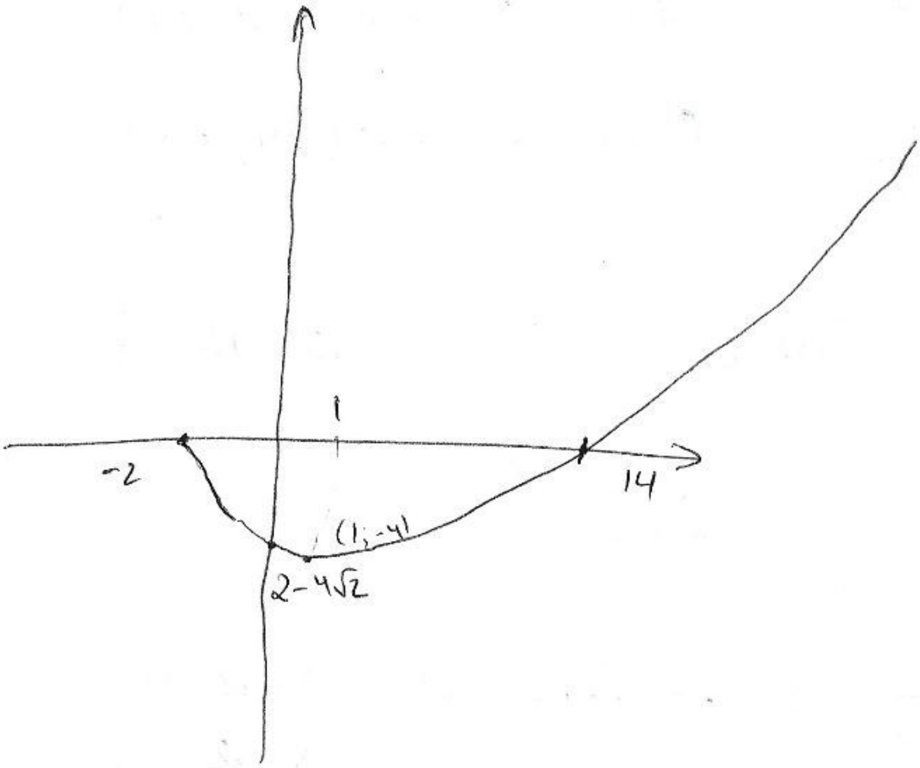
$$\Rightarrow y(\lambda+1) = 0 \rightarrow y(2+1) = 0$$

$$3y = 0$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 100 \longrightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$

$$\Rightarrow [10;0]_{\lambda=2} \notin M \quad , \quad [-10;0]_{\lambda=2} \in M$$

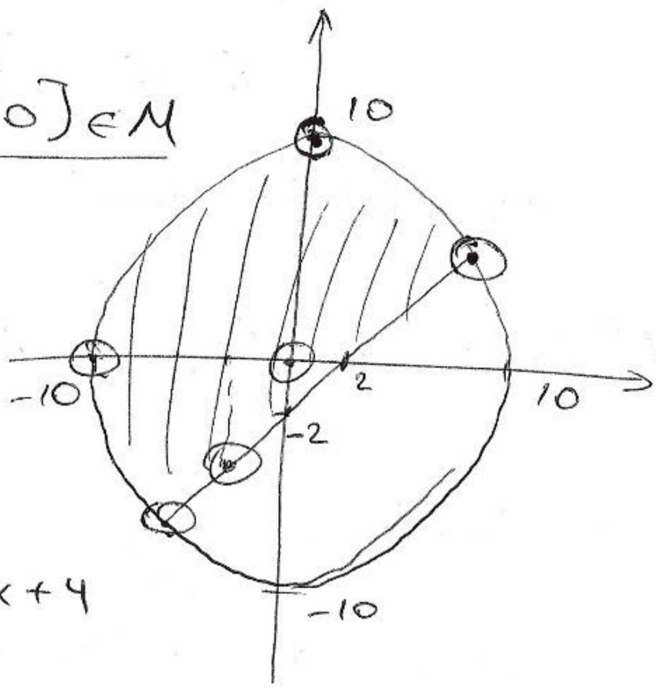


5) $f(x,y) = y^2 - 2x^2$

$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 100,\ x-y \leq 2\}$

$y \geq x-2$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -4x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \underline{[0;0] \in M}$



$f(x, y = x-2) = (x-2)^2 - 2x^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 = -x^2 - 4x + 4$

$f'_x|_{y=x-2} = -2x - 4 = 0$

$\hookrightarrow x = -2 \rightarrow y = -4 \Rightarrow \underline{[-2;-4] \in M}$

4

	$(-2;14)$	$(14;\infty)$
$\sqrt{x+2}$	$+$	$+$
$\sqrt{x+2}-4$	$-$	$+$
	$-$	$+$

$f(x) < x: \ x \in (-2; 14)$

$f(x) > x: \ x \in (14; \infty)$

• $P_x: [-2;0], [14;0]$ $\quad P_y: [0; 2-4\sqrt{2}]$

• $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$

• $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 4$

$x = 2$

	$(-2;2)$	$(2;\infty)$
$1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}$	$-$ $\searrow$	$+$ $\nearrow$

$\Rightarrow f(2) = 2 - 4\sqrt{4} + 2 = 4 - 8 = -4$

$\rightarrow [2; -4] \rightarrow$ lok. min.

• $a(x) = kx + b$, $\quad k = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - 4\sqrt{x+2}}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\infty} [-4\sqrt{x+2}] = -\infty$

$\rightarrow$ asymptota není

• $f''(x) = \left(1 - \dfrac{2}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}\right)' = -2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)(x+2)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} \neq 0$

$\Rightarrow$ inflexní body nejsou.

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} > 0$ na $D_f \Rightarrow f(x)$ je konvexní na D_f.

$-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$D = 4 + 32 = 36$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 \rightarrow x_1 = 4$

$x_2 = -2$

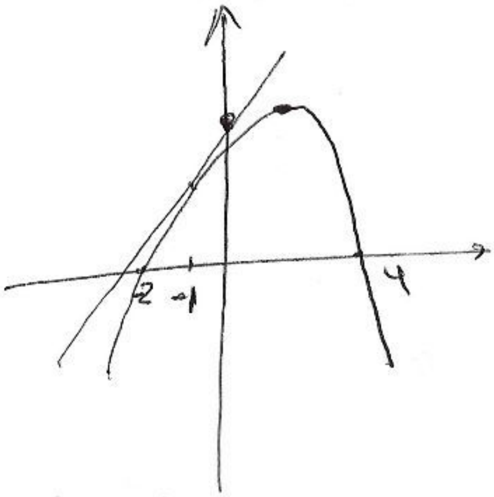
$f'(x) = -x + 1 = 0$

$x = 1$

$f(1) = -\frac{1}{2} + 1 + 4 = 4{,}5$

$\rightarrow V[1; 4{,}5]$

$f(0) = 4{,}5$



4) $f(x) = x - 4\sqrt{x+2} + 2 \rightarrow x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

- $D_f = [-2; \infty)$
- ani sudá / ani lichá
- $t = x + 2 \Rightarrow x = t - 2$, na D_f $t \geq 0$

$\Rightarrow f(t) = t - 2 - 4\sqrt{t} + 2 = t - 4\sqrt{t} = \sqrt{t}\left(\sqrt{t} - 4\right) = 0$

$\rightarrow \sqrt{t_1} = 0$

$x_1 + 2 = 0$

$x_1 = -2$

$\rightarrow \sqrt{t_2} = 4$

$t_2 = 16$

$x_2 + 2 = 16$

$x_2 = 14$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2n+1} + 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}} = \cancel{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^n + \frac{25}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}$

$$= \frac{4\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^n + 3\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{16}{9}\left(\frac{16}{9}\right)^n} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^n\left(\frac{16}{3} + \frac{25}{3}\left(\frac{15}{16}\right)^n\right)}{\left(\frac{16}{9}\right)^n\left(\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{27}{32}\right)^n - \frac{16}{9}\right)} =$$

$$= \frac{16}{3}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right) = \underline{\underline{-3}}$$

2) $f(x) = (x^2+2x)e^{x^2-3x} \qquad D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x+2)e^{x^2-3x} + (x^2+2x)(2x-3)e^{x^2-3x}$$

$$= e^{x^2-3x}\left(2x+2 + x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 6x\right) =$$

$$= e^{x^2-3x}\left(x^3 + x^2 - 4x + 2\right) \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}$$

3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4, \quad \underline{k = 2}$

$$f'(x) = -x + 1 = 2$$

$$\underline{x = -1}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} - 1 + 4 = 2{,}5 \Rightarrow t(x) = 2{,}5 + 2(x+1) =$$

$$= 2x + 4{,}5$$