Matematika pro ekonomy 14.12.2020

ZT2018-B/3

Určete glob. extrémy fce

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 6y$$

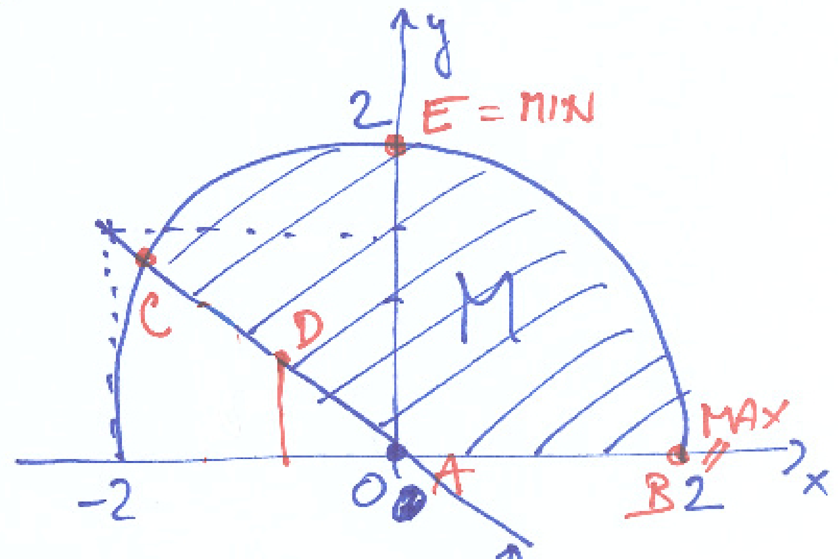
na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4,\ 4y \geq -3x,\ y \geq 0\}$$

Nakreslete množinu M + všechny kandidáty.

$x^2+y^2 \leq 4$ ... kruh o pol. 2, střed $= [0,0]$

$y \geq 0$ ... horní polorovina



$4y = -3x$

$y = -\frac{3}{4}x$ ... přímka $\qquad x = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Ⓐ Kand. uvnitř M:

$\partial_x f = 2 \cdot \frac{5}{2}x = 5x = 0$

$\partial_y f = \underline{-6 \qquad = 0}$ $\qquad$ NŘ

(B) na okraji M :

1) úsečka AB : $y = 0$
$x \in (0,2)$

dosaz. metoda :

$h(x) = f(x,0) = \frac{5}{2}x^2$

$h'(x) = 5x = 0$

$x = 0$ – (zatím) nepoužijem

$(0 \notin (0,2))$

2) nejprve spočteme souř. bodu C:

(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $4y = -3x \Leftrightarrow y = \frac{-3}{4}x$

dosadíme do (1):

$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 = 4$

$x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 4$

$\frac{25}{16}x^2 = 4$

$x^2 = \frac{64}{25}$

$x = \pm\frac{8}{5} \overset{(2)}{\Longrightarrow} y = \mp\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5} = \mp\frac{6}{5}$

$\left[\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right]$ není v M , $\left[-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right] = C$

úsečka AC : $y = -\frac{3}{4}x$, $x \in \left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

dosaz. met. : $h(x) = f\left(x, -\frac{3}{4}x\right) =$

$= \frac{5}{2}x^2 + \frac{18}{4}x = \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

$h'(x) = 5x + \frac{9}{2} = 0$

$5x = -\frac{9}{2} \quad /:5$

$x = \frac{-9}{10} \in \left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{9}{10}\right) = \frac{27}{40}$

$\Rightarrow$ kandidát $D = \left[\frac{-9}{10}, \frac{27}{40}\right]$

3) oblouk $x^2+y^2=4$

metoda koeliáme:

$$J = \begin{pmatrix} 5x & -6 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\det J = 5x \cdot 2y - (-6)2x =$$
$$= 2x(5y+6) = 0 \quad (1)$$
$$x^2+y^2 = 4 \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow$ 2 možnosti: (a) $2x=0$, (b) $5y+6=0$

(a) $2x=0$
$x=0$

(2) $\Rightarrow$ $0^2+y^2=4$
$y=\pm 2$

$\Rightarrow$ vyhovuje pouze $y=2$

$\Rightarrow$ kand. $E=[0,2]$

(b) $5y+6=0$
$y=\frac{-6}{5}$ $\Rightarrow$ nenáleží do M

(2) $x^2+\frac{36}{25}=4=\frac{100}{25}$
$x^2=\frac{64}{25}$
$x=\pm\frac{8}{5}$

(C) Dosadíme, porovnáme: $f=\frac{5}{2}x^2-6y$

$A=[0,0] \Rightarrow f(0,0)=0$

$B=[2,0] \Rightarrow f(2,0)=10$ MAX

$C=\left[-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right] \Rightarrow f\left(-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{64}{25}-\frac{36}{5}=\frac{-4}{5}$

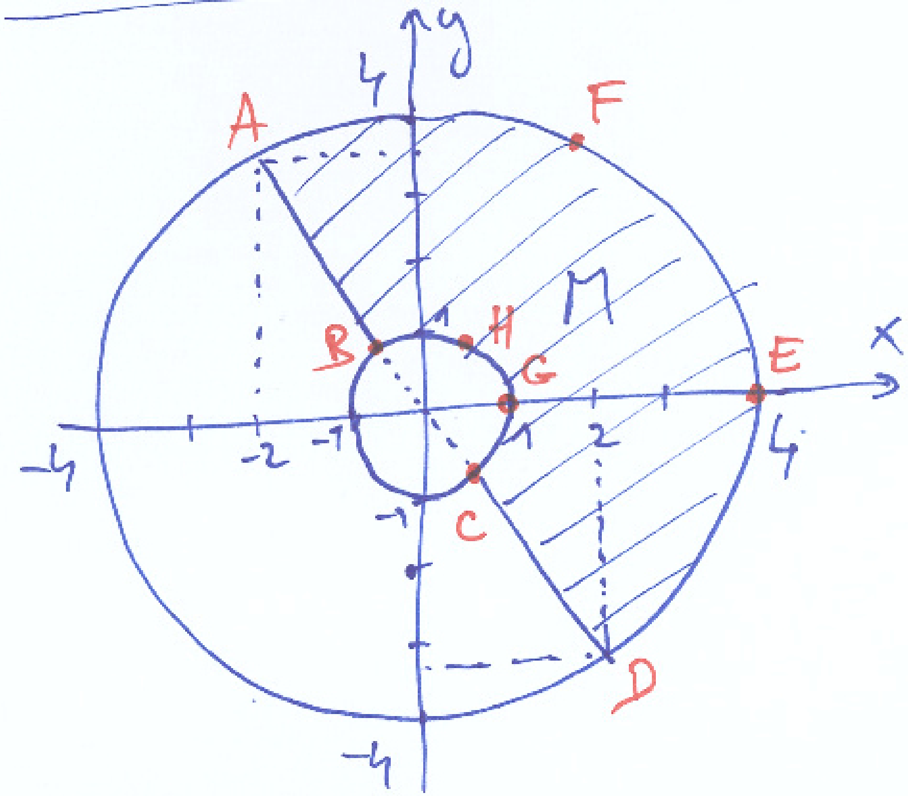
$E=[0,2] \Rightarrow f(0,2)=-12$ MIN

$D=\left[-\frac{9}{10},\frac{27}{40}\right] \Rightarrow f\left(-\frac{9}{10},\frac{27}{40}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{81}{100}-\frac{6\cdot 27}{40}=$
$=\frac{81-162}{40}=-\frac{81}{40}$

ZT 2018 - C/3

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2+y^2 \le 16,\ y \ge -\sqrt{3}\,x\}$$



Ⓐ kand. uvnitř M

$$\partial_x f = 3x^2 - 3y^2 = 0 \quad (1)$$
$$\partial_y f = -6xy = 0 \quad (2)$$

$$(2) \begin{cases} x=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y=0 \\ y=0 \underset{(1)}{\Rightarrow} x=0 \end{cases} \Rightarrow [0,0]$$ není kand.

Ⓑ 1) obě úsečky: $y = -\sqrt{3}\,x$

dosaz. m.: $f(x, -\sqrt{3}x) =$

$= x^3 - 3 \cdot x \cdot 3x^2 = -8x^3 = h(x)$

$h'(x) = -24x^2 = 0$ pouze pro $x=0$

$\Rightarrow y=0$

$[0,0]$ opět $\notin M$

2) velká kružnice:

$$x^2+y^2=16$$

LM: $L(x,y,\lambda)= x^3-3xy^2+\lambda(x^2+y^2-16)$

$$\partial_x L = 3x^2-3y^2+2x\lambda = 0 \quad (1)$$
$$\partial_y L = -6xy + 2y\lambda = 0 \quad (2)$$
$$x^2+y^2=16 \quad (3)$$

Nápad: z (2) vytkneme y:

$$y(-6x+2\lambda)=0$$

$\Rightarrow$ 2 možnosti: (a) $y=0$, (b) $-6x+2\lambda=0$

(a) $\boxed{y=0}$, $\overset{(3')}{\Longrightarrow}$ $x^2=16$

$x=\pm 4 \Rightarrow$ ~~$y \geq 4\sqrt{3}$~~

~~zkontrolujeme i zda~~

zkontrolujeme i zda $y \geq -\sqrt{3}x$: $E=[4,0] \in M$

$[-4,0] \notin M$

(b) $-6x+2\lambda=0$

$2\lambda = 6x \quad /:2$

$\lambda = 3x$

dosadíme do (1):

(1) $3x^2-3y^2+6x^2=0$

$9x^2-3y^2=0$

(3) $x^2+y^2=16 \quad] +3\cdot$

$12x^2=48 \quad /:12$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

(3): $4+y^2=16$

$y^2=12$

$y=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$

nezávislá znaménka u x,y:

$F=[2,2\sqrt{3}]\in M$ $A=[-2,2\sqrt{3}]\in M$

$D=[2,-2\sqrt{3}]\in M$ $[-2,-2\sqrt{3}]\notin M$

5)

3) malá kružnice

$x^2+y^2=1$

obdobně jako u velké kružnice

$\Rightarrow$ po vyloučení z (2). rovnice máme

opět 2 možnosti:

(a) $y=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} x^2=1$

$x=\pm 1$

$G=[1,0] \in M$

$[-1,0] \notin M$

(b) $-6x+2d=0$

$\Rightarrow \quad 9x^2-3y^2=0$

(3) $\quad x^2+y^2=1 \quad] +3\cdot$

$12x^2 = 3 \quad /:12$

$x^2=\frac{1}{4}$

$x=\pm\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{4}+y^2=1$

$y^2=\frac{3}{4}$

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ nezávr. znam.

$H=[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]\in M$ $B=[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]\in M$

$C=[\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]\in M$ $[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]\notin M$

Vrcholy: $y=-\sqrt{3}x$ dosadíme do:

1) $x^2+y^2=16$: $x^2+3x^2=16$

$4x^2=16$

$x=\pm 2,\ y=\mp 2\sqrt{3}$

A, D

2) $x^2+y^2=1$: $x^2+3x^2=1$

$4x^2=1$

$x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

B, C

Dosazení: D, F ... $f=\underline{-64}$ MIN

A, E ... $f=\underline{64}$ MAX

B, G ... $f=1$, C, H ... -1