

Matematika pro ekonomy
Domácí úkol 20

Úlohy ze závěrečného testu z LS 2010/11 s řešením

Toto jsou úlohy použité v závěrečném testu v letním semestru 2010/11. Úlohy jsou číslovány 1–5, každá je ve variantách A,B,C,D.

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x)$ tj. najděte definiční obor, limity a hodnoty v důležitých bodech, kořeny, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, případné asymptoty, obor konvexity a konkavity, inflexní body, načrtněte graf.

A. $f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{1-x}\right)$

B. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{(x-1)}}$

C. $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+4}}$

D. $f(x) = \frac{e^{3x}}{x-2}$

2. Najděte všechny stacionární body funkce $f(x, y)$ v \mathbb{R}^2 .

A. $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 - y$

B. $f(x, y) = x^2 - x - xy + 2y^3$

C. $f(x, y) = x^3 - x^2 - 4x + y^2 + 2xy$

D. $f(x, y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

3. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M .

A. $f(x, y) = x^2 - 8x + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x^2\}$

B. $f(x, y) = 2x - x^2 + 3y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -3 \leq x \leq 6, x^2 \leq y \leq 3x + 18\}$

C. $f(x, y) = y - x,$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 6, x^3 - 5x^2 - 7x + 12 \leq y \leq 12 - x\}$$

D. $f(x, y) = x^2 + 2y, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 5, x - 5 \leq y \leq 5 + 4x - x^2\}$

4. Určete extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M .

A. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + y^2 \leq 27\}$

B. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8\}$

C. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + (y - 2)^2 = 9\}$

D. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 6y + 10,$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$$

5. Určete extrémů funkce $f(x, y, z)$ na množině M .

A. $f(x, y, z) = 4x - y, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y^2 + z^2 = 40, x^2 + z^2 = 100\}$

B. $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4,$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (x - 1)^2 + y^2 = 13, 3x + 2y - z + 12 = 0\}$$

C. $f(x, y, z) = x - 2y + z, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9, y^2 + z^2 = 5\}$

D. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4,$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + (z - 2)^2 = 10, 6x - y + 2z = 4\}$$

Řešení:

1. A. $D_f = (-5, 1)$, roste v D_f , $\lim_{x \rightarrow -5^+} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty$, inflexe v bodě 0, svislé asymptoty $x = -5, x = 3$.

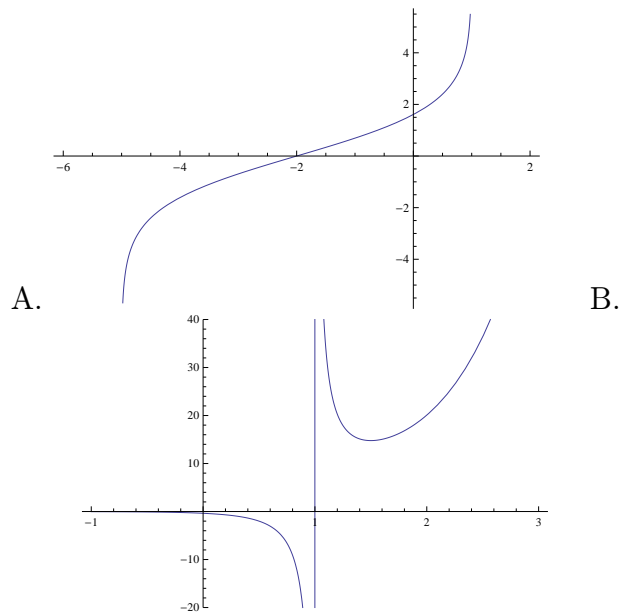
B. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, v $(-\infty, 1)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(1, \frac{3}{2})$ klesá od $+\infty$ do $2e^2$, v $(\frac{3}{2}, +\infty)$ roste od $2e^2$ do $+\infty$ a je konvexní v $(1, +\infty)$, svislá asymptota $x = 1$.

C. $D_f = \mathbb{R}$, $\max f(-4) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \mp 1$, konkávní v $(-3 - \sqrt{11}, -3 + \sqrt{11})$, jinde konvexní, asymptoty v $\pm\infty$: $y = \mp 1$.

D. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, v $(-\infty, 2)$ klesá od 0 do $-\infty$ a je konkávní, v $(2, \frac{7}{3})$ klesá od $+\infty$ do $3e^7$, v $(\frac{7}{3}, +\infty)$ roste od $3e^7$ do $+\infty$ a je konvexní v $(2, +\infty)$, svislá asymptota $x = 2$.

2.

- A.** $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$,
- B.** $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{3}{8}, -\frac{1}{4})$,
- C.** $(2, -2), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$,
- D.** $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.



3.

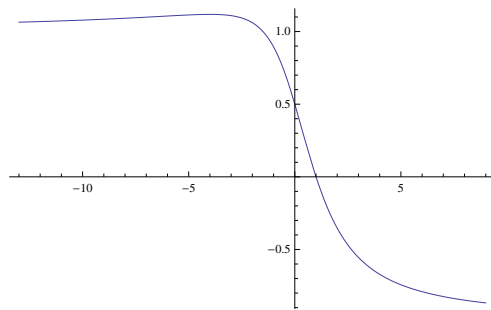
- | | <i>min</i> | <i>max</i> |
|----|---|---|
| A. | $f(2, -2) = -18$ | $f(0, 0) = f(2, 4) = 0$ |
| B. | $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ | $f(\frac{11}{2}, \frac{69}{2}) = \frac{337}{4}$ |
| C. | $f(4, -32) = -36$ | $f(0, 12) = 12$ |
| D. | $f(-1, -6) = -11$ | $f(4, 5) = 26$ |

4.

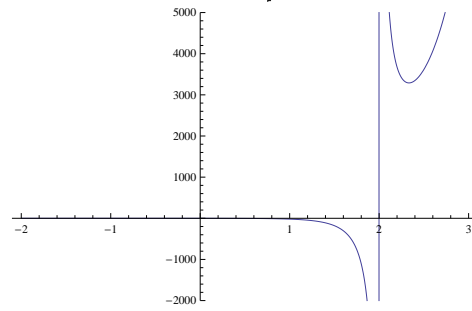
- | | <i>min</i> | <i>max</i> |
|----|---|--|
| A. | $f(0, 0) = 0$ | $f(\pm(3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})) = 81$ |
| B. | $f(0, 0) = 0$ | $f(\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}, \frac{3\mp\sqrt{15}}{2}) = \frac{27}{2}$ |
| C. | $f(\pm\frac{\sqrt{17}}{6}, -\frac{2}{3}) = e^{11/12}$ | $f(0, 5) = e^{25}$ |
| D. | $f(2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$ | $f(2 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$ |

5.

- | | <i>min</i> | <i>max</i> |
|----|--|---|
| A. | $f(-10, \sqrt{40}, 0) = -40 - \sqrt{40}$ | $f(10, -\sqrt{40}, 0) = 40 + \sqrt{40}$ |
| B. | $f(-2, -2, 2) = 20$ | $f(4, 2, 28) = 800$ |
| C. | $f(-2, 2, -1) = -7$ | $f(2, -2, 1) = 7$ |
| D. | $f(1, 0, -1) = f(-1, 0, 5) = 10$ | $f(-3, -20, 1) = f(3, 20, 3) = 410$ |



C.



D.