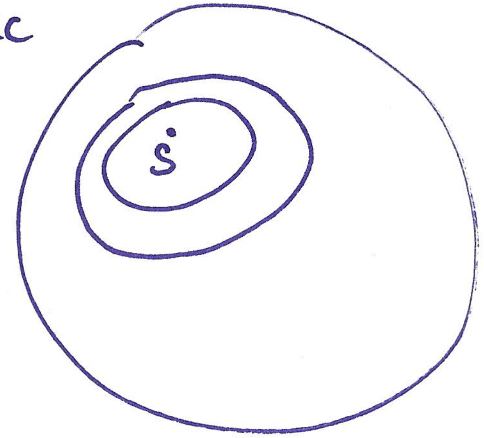
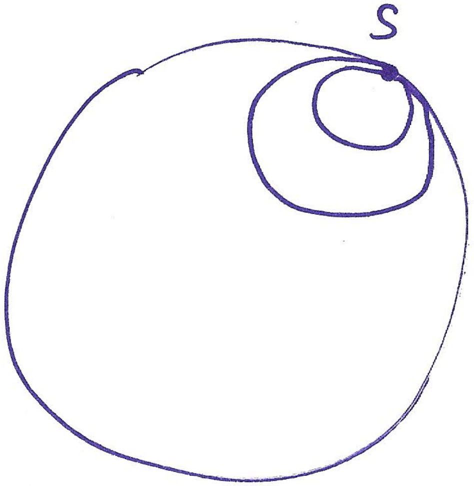
Pohyb v Lobač. rovině

↳ 3 druhy kružnic

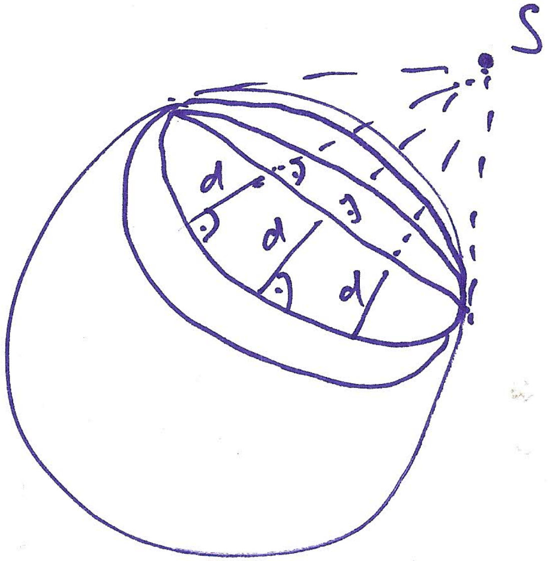
v BK modelu:



cykly
~svazek různoběžek

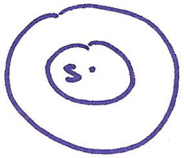


horocykly
~svazek rovnoběžek

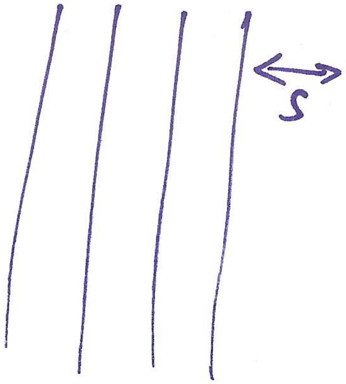


ekvidistanty
~svazek mimob.

v Eukl. rovině:
2 druhy kružnic

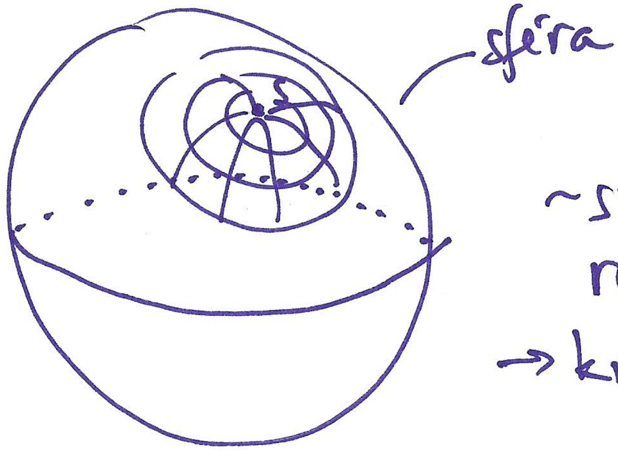


obyč. kružnice
~svazku různob.



rovnoběžky
~svazku rovnob.

na sféře / v elipt. rovině



~svazek
různob.
→ kružnice

Pohyb v Eukl. rovině – algebraicky

$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longrightarrow X' = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix}$

- translace o vektor $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ $\quad X' = X + v$
- rotace o úhel φ se středem $[0,0]$ $\quad X' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot X$
- reflexe třeba podle osy x $\quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$

→ pohybová grupa (eukleidovská)

její dimenze ≈ počet volných parametrů

zde : dim = 3

(1: úhel φ
2: složky $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$)

eukl. grupa pohybů zachovává:

- translace – zach. rovnoběžky
- rotace – zach. kružnice

? Co je zachováváno všemi eukl. pohyby ? Je to dvojice izotropických bodů $[0:1:i]$, $[0:1:-i]$

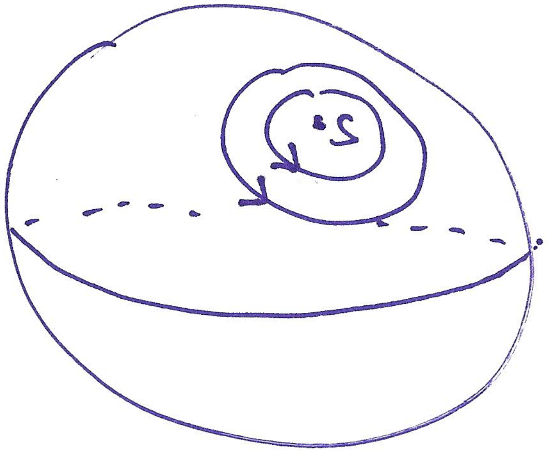
množinový invariant

číselný invariant

A také zachovávají úhel a vzdálenost ⟺ skal. součin.

V elipt. rovině:

pohyb. grupa sestává ze samých rotací, má opět $\underline{\underline{\dim = 3}}$ – odpovídá rotacím podle 3 os

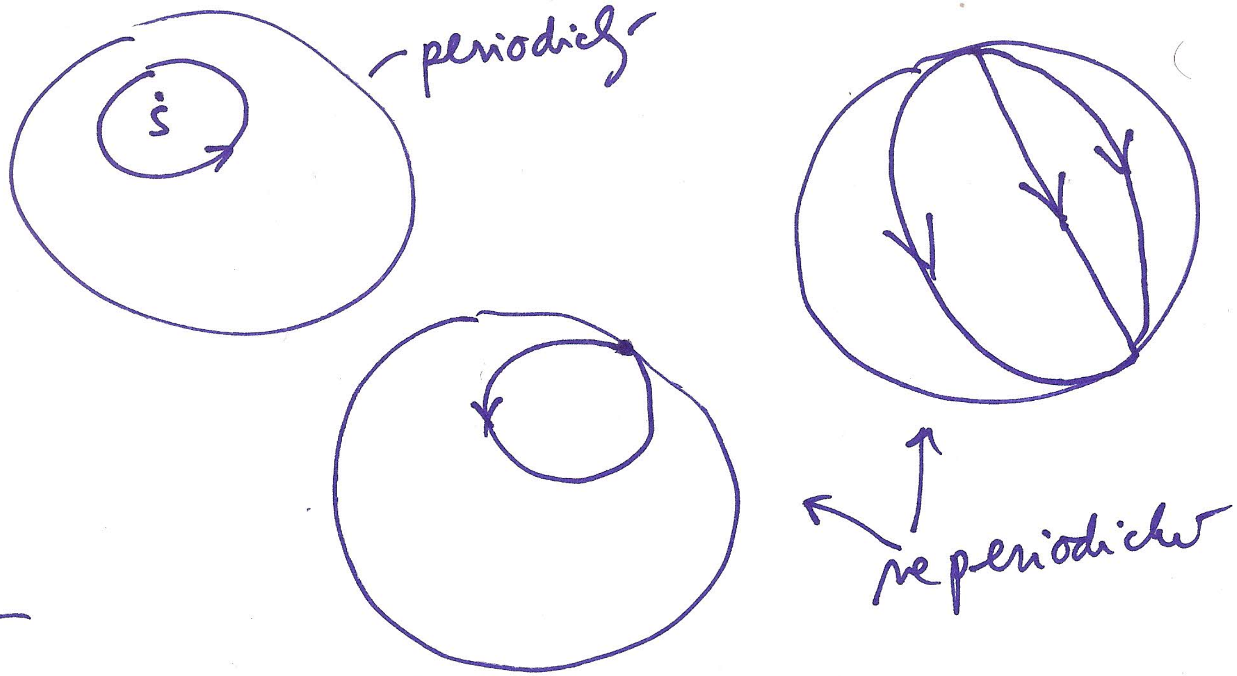


Pohybová grupa v Lobač. rovině:

pohyby zachovávají střed S

3 polohy bodu S ⇒ 3 druhy svazků ⇒ 3 druhy kružnic ⇒ 3 druhy pohybu:

- cykly ... <u>rotace</u>
- horocykly ... <u>horocyklický pohyb</u>
- ekvidistanty ... <u>pohyb po ekvidistantě</u> („<u>posunutí</u>")



3×1 parametr ⇒ $\underline{\underline{\dim = 3}}$

③

Algebraicky: homog. souř.

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto X' = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

projektivní pohybová grupa

je $PGL_3\mathbb{R} = \left\{ \begin{array}{l} \text{regul. matice } A, \text{ reálné} \\ \text{rozměru } 3\times 3, \\ \text{brané až na násobek} \neq 0 \end{array} \right\}$

$GL_3\mathbb{R}$ = general linear group
= obecná lineární grupa
$= \{A \dots 3\times 3, \text{ regulární}\}$

dim = 9

$PGL_3\mathbb{R}$ = vš. projektivity v rovině

$\hookrightarrow \dim = 9 - 1 = 8$

„až na násobek"

hyperb. pohybová grupa H_2 musí být podgrupou $PGL_3\mathbb{R}$!

<u>Totiž</u>: $PGL_3\mathbb{R}$ zachovává dvojpoměr

a my chceme, aby H_2 zachovávala hyp. vzdál. a úhly ⇒ nutně musí také zachovávat <u>dvojpom.</u>

ale H_2 musí zachovávat i něco ~~navíc~~ navíc:

- zachovává AK
- pro daný bod S příslušný pohyb zachovává tento bod

↳ tj. H_2 zachovává 5 bodů

3 body

$8 - 5 = \underline{3}$ ‼

Výpočet by vypadal takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in PGL_3 \mathbb{R}$$

$$\rho \cdot X' = A \cdot X \qquad (\rho = \text{násobek} \neq 0)$$

H_2 zachovává AK: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 = 0$$

$\Rightarrow$ vztahy

$$\underbrace{\begin{aligned} &a)\ a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{01}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{02}^2 \\ &b)\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{01}a_{02} = 0 \\ &\quad \vdots \end{aligned}}_{\text{těch 5 rovnic}}$$

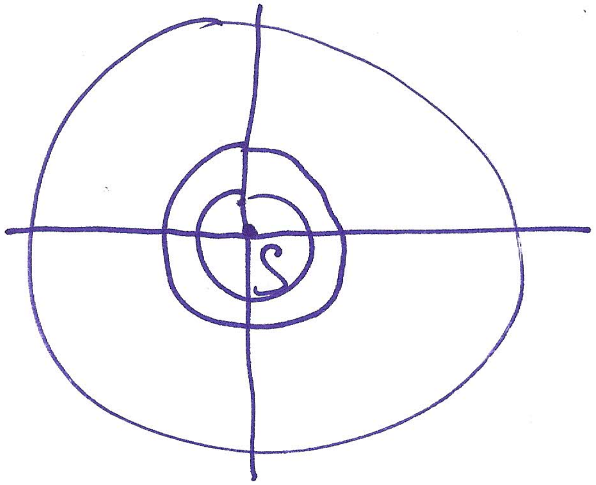
navíc se má zachovávat bod S (ve 3 různých polohách)

(1) rotace, $S = [1:0:0]$

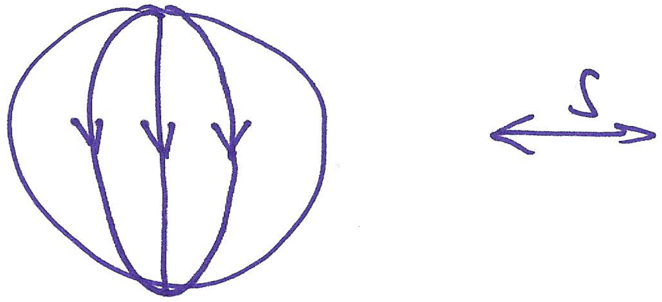
$$\Rightarrow \text{vyjde } A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ 0 & \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ jsou to „obyčejné rotace" + reflexe

(P. pro volbu $S = [1:0:0]$)



② pohyb po ekvidistantě: $S = [0:1:0]$



$$A = \begin{pmatrix} \pm\cosh\varphi & 0 & \pm\sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm\sinh\varphi & 0 & \pm\cosh\varphi \end{pmatrix}$$

záměnou souřadnic $x_0 \leftrightarrow x_1$ dostáváme

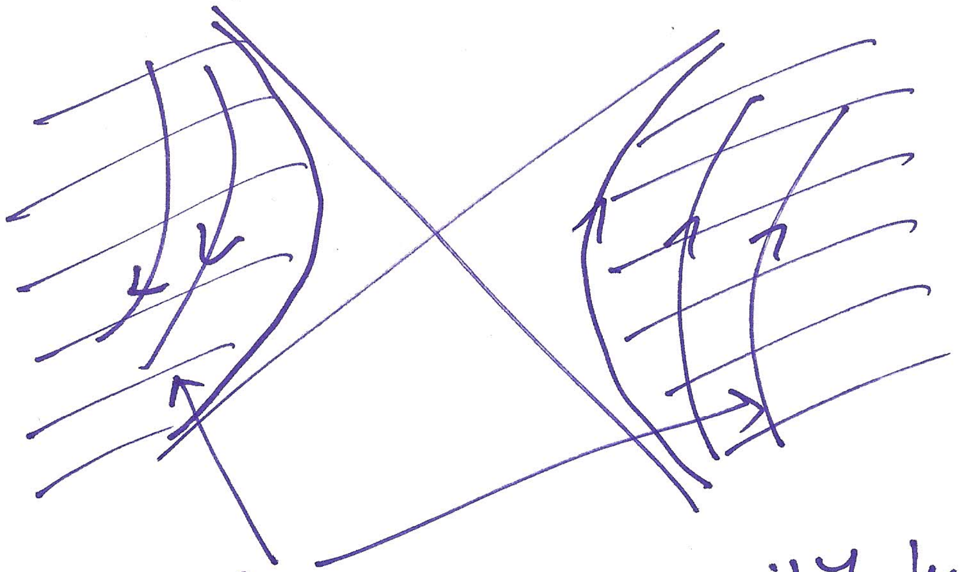
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

AK $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad / : x_1^2$

$$\frac{x_0^2}{x_1^2} - 1 - \frac{x_2^2}{x_1^2} = 0$$

hyperbola!

v tomto modelu se pohyb po ekvidistantě jeví jako pohyb po hyperbolách!



Lobač. rovina = vnitřek hyperb.

③ horocyklický pohyb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & at \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

vhodnou záměnou souřadnic dostaneme

AK = parabola

horoc. pohyb = pohyb po parabolách