Neeuklidovská geometrie I – stručný souhrn znalostí ke zkoušce

- Euklidovy axiomy, jiné možné typy geometrií. Ekvivalentní vyjádření 5. axiomu: znát aspoň 4 různá ekvivalentní vyjádření a aspoň jeden důkaz.
- Předhistorie neeuklidovské geometrie – pokusy o důkaz 5. axiomu: znát několik jmen a umět představit jejich pokusy o důkaz.
- Afinní geometrie. Afinní rovina, dělící poměr bodů na afinní přímce, střed úsečky. Kterých hodnot nabývá dělící poměr při permutacích bodů a v jakých případech jsou některé tyto hodnoty totožné?
- Projektivní geometrie. Projektivní prostor, projektivní rozšíření afinního prostoru, homogenní souřadnice, vlastní a nevlastní body, dvojí náhled na projektivní přímku, dualita v projektivní rovině, převod mezi kartézskými a homogenními souřadnicemi, objekty vyjádřené homogenními polynomy. Dvojpoměr čtyř vektorů, čtyř bodů, výpočetní lemma se čtyřmi determinanty, vztah dvojpoměru a dělícího poměru pro 4 vlastní body, pro 3 vlastní body a 1 nevlastní. Hodnoty dvojpoměru při permutacích bodů, Kleinova čtyřgrupa. Harmonická (a ekvianharmonická) čtveřice bodů.
- Kvadriky. Bilineární a kvadratické formy, kvadriky v proj. prostoru, regulární a singulární kvadriky, polární sdruženost, singulární bod, vrchol kvadriky, signatura, maximální podprostory na kvadrice. Projektivní klasifikace kvadrik v dimenzi 1 a 2. Polární nadrovina (polára), pól, tečná nadrovina (tečna), bod dotyku. Algebraický výpočet poláry pro daný pól.
- Pohybové grupy. Popis euklidovské geometrie v rovině pomocí grupy eukl. transformací E_2 (rotace, translace, reflexe a jejich složení, čili shodnosti). Grupy transformací euklidovské (E_2), afinní (Af_2) a projektivní (PGL_3) geometrie, jejich dimenze, číselné a množinové invarianty. Izotropické přímky, izotropické body. Grupa Af_2 je podgrupou PGL_3; výpočet izotropických bodů jako vlastních vektorů rotačních matic.
- Kleinova základní idea: geometrie na prostoru P může být dána třemi způsoby: 1. měření délek a úhlů, 2. zadání grupy pohybových transformací, 3. zadání grupy tak, že zachovává danou kvadriku. Komplexní funkce exp a Log. Laguerrův vzorec pro výpočet úhlu přímek ve svazku pomocí dvojpoměru: odvození.
- Zavedení neeukl. geometrie v dimenzi 1 - klasifikace pomocí zadané kvadriky, absolutní elementy. Požadavky kladené na míru dvou elementů: invaiance vůči pohybové grupě a početní vlastnosti. Výpočet dvojpoměru pomocí zadané formy. Zavedení míry pomocí logaritmu z dvojpoměru. Hyperbolická přímka. Volba konstanty $c = k$ a z ní plynoucí vlastnosti hyperbolické přímky: rozdělení na dva díly.

- Výpočtové vzorce pro hyperbolickou míru, nevl. body = abs. body. Geometrický význam konstanty k, analytický výpočet hyperbolické vzdálenosti.

- Perspektivita a projektivita bodových řad. Konstrukce na hyp. přímce: přenesení délky, rozpůlení úsečky.

- Popis pohybových grup pro elipt. a hyperb. přímku. Eliptická přímka. Volba konstanty $c = l$ (el, ne jedna) a z ní plynoucí vlastnosti: omezenost, celková míra $l\pi$, vzorce pro výpočet míry; lokální interpretace eliptické geometrie s konstantou l jako euklidovské geometrie na kružnici o poloměru l. Parabolická geometrie: jen vědět, co to vlastně je.

4. února 2016, Lukáš Krump