Několik příkladů na kuželosečky

V následujících úlohách určete projektivní i afinní typ kuželosečky Q, u singulárních určete vrchol $V(Q)$, a podle typu určete střed, směr osy, nevlastní body, asymptoty.

1.
$$-x^2 + 2y^2 + xy + 2x - 10y + 8 = 0$$

2.
$$4x^2 + y^2 + 4xy - 16x - 8y + 12 = 0$$

3.
$$x^2 + 3y^2 + 2xy + 4x - 2y + 1 = 0$$

4.
$$2x^2 + y^2 + 6xy + 2x + 4y + 4 = 0$$

5. K dané kuželosečce určete tečny z každého ze zadaných bodů.

$$x^2 - y^2 + 4xy + 4x + 2y + 3 = 0$$

$$P = [-1, -1],\ R = [-3, 0],\ T = [0, -2]$$

Řešení:

1. Q je singulární, $V(Q) = [1 : 2 : 2]$, tedy vlastní bod, proto je Q buď tento bod nebo dvojice různoběžek. B je regulární se signaturou $(1, -1)$, takže $Q \cap N$ (N značí nevlastní přímku) je dvojice bodů a proto je Q dvě různoběžky s průsečíkem $[2, 2]$ – tento bod vyjde automaticky také jako střed kčky. Zmíněné dva nevlastní body kčky jsou $[0 : 1 : \frac{1}{2}], [0 : 1 : -1]$, to jsou tedy směry asymptot a tedy i oněch dvou různoběžek. Odtud dostáváme rovnice těchto dvou různoběžek: $x - 2y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$. Snadno ověříme, že vynásobením těchto dvou rovnic dostaneme původní rovnici kčky.

2. Q je singulární, $V(Q) = [0 : 1 : -2]$, tedy nevlastní bod, proto je Q buď tento nevlastní bod nebo dvojice rovnoběžek. K tomu stačí určit, zda má kčka nějaké reálné body, určeme např., zda protíná osu x. Průsečíky s osou x vyjdou $x = 1, x = 3$, takže je to skutečně dvojice rovnoběžek, a sice $y = -2x + 2, y = -2x + 6$. Zároveň vychází matice B singulární a odtud opět dostáváme směr osy, čili směr rovnoběžek $(1, -2)$.

3. Q je regulární, signatura vyjde $(2, 1, 0)$, je tedy oválná. Matice B vyjde regulární se signaturou $(2, 0, 0)$, tedy $Q \cap N$ je formálně reálná, Q nemá žádné nevlastní body a je to tedy elipsa. Její střed je $[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}]$.

4. Q je regulární, signatura vyjde $(2, 1, 0)$, je tedy oválná. Matice B vyjde regulární se signaturou $(1, 1, 0)$, tedy $Q \cap N$ jsou dva body, Q je tedy hyperbola. Její střed je $[-\frac{5}{7}, \frac{1}{7}]$. Směry asymptot jsou zmíněné nevlastní body, k jejich nalezení si je napíšeme ve tvaru $[0 : x : y]$, který dosadíme do rovnice kvadriky (což je totéž, jako dosadit vektory (x, y) do matice B), zvolíme např. $x = 1$ a vyjdou řešení $y = -3 \pm \sqrt{7}$, tedy směry asymptot jsou $[0 : 1 : -3 - \sqrt{7}], [0 : 1 : -3 + \sqrt{7}]$.

5. Bod P má poláru $\varrho_P : x = 0$, její průsečíky s Q jsou $[0, 3], [0, -1]$, tečny $y = 4x + 3, y = -1$.

Bod R má poláru $\varrho_R : x + 5y + 3 = 0$. Pokud si hned nevšimneme, že $R \in \varrho_R$, tak počítáme průsečíky poláry s kčkou, a vyjde jediné řešení – bod R. Je to tedy bod na Q a je bodem dotyku své tečny ϱ_R.

Bod T má poláru $\varrho_T : -2x + 3y + 1 = 0$, která neprotíná Q, tedy T je vnitřním bodem kčky.

Pokud jde o samotnou Q, vyjde hyperbola se středem $[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}]$ a směry asymptot $[0 : 1 : 2 + \sqrt{5}], [0 : 1 : 2 - \sqrt{5}]$.

Lukáš Krump, 18.1.2015