

Domácí úkol z lineární algebry (cvičení L. Krump)

Každá úloha je za půl bodu. Deadline: 11.1.2012

1. Najděte všechna řešení reálné soustavy v závislosti na parametru $b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \end{array} \right)$$

2. Najděte všechna řešení reálné soustavy v závislosti na parametru $b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & b \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -b \end{array} \right)$$

3. Určete dimenze podprostorů $V, W, V \cap W, V \vee W$ prostoru $\mathbb{R}^5$:

$$V = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (0, 1, 0, 1, 0), (2, 3, 2, -1, -1), (3, 3, 5, 1, 4) \rangle$$

$$W = \langle (5, 6, 11, 8, 14), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle$$

4. Popište průnik vektorových prostorů $V, W \subset \mathbb{R}^5$ (tedy najděte nějakou jeho bázi), kde

$$V = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (0, -1, 0, 1, 0), (3, 2, 1, -1, 3) \rangle,$$

$$W = \langle (0, 4, -4, -5, 0), (0, 1, 6, 8, 6), (1, -2, 1, 0, -1) \rangle.$$

5. Určete dimenze podprostorů $V, W, V \cap W, V \vee W$ prostoru $\mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$V = \langle (3, -1, -2, 2, 1), (1, 4, 0, 1, -1), (\lambda, 6, -4, 6, 0) \rangle$$

$$W = \langle (1, -3, 2, -3, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \rangle$$

6. Homomorfismus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zadán předpisem

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x - y \\ z \\ y - 3z \end{pmatrix} \text{ pro všechny } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vyjádřete jeho matici vzhledem k bázím

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ (pro vzory), } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ (pro obrazy).}$$

7. Homomorfismus $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zadán předpisem

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u - v \\ v - x \\ x - y \end{pmatrix} \text{ pro všechny } \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Vyjádřete jeho matici vzhledem k bázím

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^3.$$

8. Je dán homomorfismus $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$f \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) := a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pro všechny $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, Rozhodněte, zda se jedná o automorfismus, a pokud ano, najděte matici inverzního automorfismu vzhledem ke kanonickým bázím.

9. Homomorfismus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je zadán předpisem

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - z \\ y \end{pmatrix} \text{ pro všechny } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vyjádřete jeho matici vzhledem k bázím

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^4.$$

10. Jsou dány homomorfismy $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) := a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro všechny $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Vyjádřete matici složeného homomorfismu gf vzhledem ke kanonickým bázím v $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2$.

11. Jsou dány homomorfismy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a-b \\ 2b \\ a+b \end{pmatrix}$$

pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$,

$$g \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y \\ -x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x \\ -x+y-z \\ -2y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

pro všechny $x, y, z \in \mathbb{R}$, Vyjádřete matici složeného homomorfismu gf vzhledem ke kanonickým bazím v $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$.

12. Vypočítejte hodnotu reálného determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

13. Vypočítejte hodnotu reálného determinantu $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & n \end{vmatrix}$$

14. Vypočítejte hodnotu reálného determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix},$$

kde $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

15. Vypočítejte hodnotu determinantu $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$