

Analýza pro studenty Učitelství, LS druhého ročníku – příklady k procvičení, 4. série

Křivkový a plošný integrál.

1. V následujících úlohách vypočtete délku zadané křivky resp. křivkový integrál prvního druhu.

1. Délka kružnice o poloměru R , tj. $\{(x, y); x^2 + y^2 = R^2\}$.
2. Délka části šroubovice o „poloměru“ R : $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t, t), t \in (a, b)$.
3. Délka základního úseku cykloidy, tj. $\varphi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), t \in (0, 2\pi)$.
4. $\int_{\varphi} \sqrt{1 + x^2 + y^2} ds$ přes spirálu $\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t), t \in (0, a)$.
5. $\int_{\varphi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$ přes úsek hyperboly $xy = 1$ z bodu $[\frac{1}{2}, 2]$ do bodu $[2, \frac{1}{2}]$.

2. V následujících úlohách vypočtete zadaný křivkový integrál druhého druhu.

1. $\int_{\varphi} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ přes křivku $y = 1 - |1 - x|, x \in (0, 2)$, orientovanou od bodu $[0, 0]$ do bodu $[2, 0]$.
2. $\int_{\varphi} y dx + z dy + x dz$ přes úsek šroubovice $\varphi = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in (0, 2\pi)$ s orientací danou touto parametrizací.
3. $\int_{\varphi} x dy + y dx$, kde φ je úsečka z bodu $[-1, 2]$ do bodu $[2, 3]$ (tím je dána i orientace). Tutéž úlohu spočtete pomocí věty o potenciálu, tj. najděte funkci $U(x, y)$ takovou, že $U_x = y, U_y = x$ a hledaný výsledek najděte jako rozdíl jejich hodnot v daných bodech.
4. $\int_{\varphi} -x^2 y dx + xy^2 dy$ přes kružnici $x^2 + y^2 = a^2$. Zkuste počítat přímo i pomocí Greenovy věty, tj. $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ integrací přes příslušný kruh.

3. V následujících úlohách vypočtete plošný obsah zadané plochy resp. plošný integrál 1. druhu.

1. Obsah sféry o poloměru R , tj. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.
2. Obsah kruhového paraboloidu $M := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.
3. Obsah toru, jehož hlavní středová kružnice má poloměr a a kružnice, která podél ní rotuje, má poloměr b .
4. $\int_{S^2} x^2 + y^2 dS$ přes jednotkovou sféru $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
5. $\int_M z^2 dS$ přes kuželovou plochu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, z \in (0, r)\}.$$

4. Plošný integrál 2. druhu, Gaussova-Ostrogradského a Stokesova věta.

1. Spočítejte $\int_M xdydz + ydzdx + zxdy$, kde M je sféra o poloměru a se středem v počátku orientovaná kladně vzhledem k příslušné kouli, dvěma různými způsoby: jednak podle definice plošného integrálu, jednak pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty, tj. integrací funkce $\text{div} \vec{F}$ přes celou kouli.
2. Buď M šroubová plocha v $\mathbf{R}^3$ zadaná parametrizací $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, R)$, $R > 0$, orientovaná pomocí normály, jejíž z -složka je v každém bodě kladná. Spočítejte $\int_M dx dy$.
3. Je dán jednodílný hyperboloid $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = z^2 + 1, |z| \leq 1\}$, orientovaný pomocí vnější normály. Spočítejte dvěma různými způsoby $I = \int_M z dx dy - x dy dz$, tj. jednak podle definice plošného integrálu (zde je nutno použít parametrizaci $\Phi(s, t) = (\cosh s \cos t, \cosh s \sin t, \sinh s)$, $t \in (0, 2\pi)$, $s \in (-c, c)$, kde $\sinh c = 1$) a jednak pomocí Stokesovy věty ($I = \int_{\partial M} \vec{G} d\vec{S}$, kde ∂M je tvořen dvěma kružnicemi a $\vec{G}$ je vektorová funkce splňující $\text{rot} \vec{G} = \vec{F} = (-x, 0, z)$).

Výsledky:

1. $2\pi R, \sqrt{R^2 + 1}(b - a), 8a, a + \frac{a^3}{3}, \ln 2 - \ln \frac{1}{2}$
2. $\frac{4}{3}, -\pi a^2, 8, \frac{\pi a^4}{2}$
3. $4\pi R^3, \pi/6(\sqrt{125} - 1), 4\pi^2 ab, \frac{8\pi}{3}, \frac{\sqrt{2}\pi^4}{2}$
4. $\frac{4}{3}\pi a^3, \pi R^2, 4\pi$