Analýza pro studenty Učitelství, LS druhého ročníku – příklady k procvičení, 3. série

Fubiniho věta, věta o substituci v dimenzi 3. Statické momenty a těžiště.

Všude v zadání jsou a, b, c, d kladná reálná čísla.

1. V následujících úlohách vypočtěte objem zadaného tělesa.

1. Čtyřstěn zadaný vrcholy $(0,0,0), (a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$.
2. Koule o poloměru R, tj. těleso ohraničené plochou o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
3. Elipsoid ohraničený plochou o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. Válec $x^2 + y^2 \leq R^2, z \in (a, b)$.
5. Kužel $x^2 + y^2 \leq z^2, z \in (0, b)$.
6. Vivianiho těleso, tj. průnik válce $(x - R)^2 + y^2 \leq R^2$ s koulí $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$.
7. $\{(x, y, z); (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 8(x^2 + y^2 - z^2)\}$.
8. Paraboloid vzniklý rotací úseče paraboly $y^2 \leq 2cx, x \in (0, a)$ okolo osy x.

2. V následujících úlohách vypočtěte objem tělesa ohraničeného zadanými plochami.

1. Těleso ohraničené plochami $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$.
2. Těleso ohraničené plochami $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$.
3. Těleso ohraničené plochami $z = xy, z = 0, x + y + z = 1$.
4. Těleso ohraničené plochami $x^2 + y^2 = z, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$.
5. Těleso ohraničené plochami $x^2 + y^2 = z^2 - 1, x^2 + y^2 = 1$. (První uvedená plocha je tzv. dvoudílný hyperboloid, ohraničuje těleso shora i zdola.)
6. Těleso ohraničené plochami $x^2 + y^2 = z^2 + 1, z = d, z = -d$. (Jedná se o tzv. jednodílný hyperboloid, jehož tvar znáte např. jako chladicí věž elektrárny. Vhodná parametrizace je $x = r \cosh \alpha \cos \beta, y = r \cosh \alpha \sin \beta, z = \sinh \alpha, r \in (0, 1), \beta \in (0, 2\pi), \alpha \in (-c, c)$, kde $d = \sinh c$.

3. Najděte souřadnice těžiště hmotné desky (s konstantní hustotou) ohraničené danými křivkami.

1. $ay = x^2, x + y = 2a$.
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$.
3. $x^{2/3} + y^{2/3} = z^{2/3}, x = 0, y = 0$.
4. $(x/a + y/b)^3 = xy/c^2$.

5. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy, x=0, y=0$.

4. Najděte souřadnice těžiště zadaného tělesa M (není-li uvedeno jinak, je hustota konstantní).

1. M je krychle $(0,a)\times(0,b)\times(0,c)$, hustota $\varrho(x,y,z)=xy^2z^3$.

2. M je část rotačního paraboloidu: $M=\{(x,y,z); x^2+y^2\le 2z\le 2c\}$.

3. M je část rotačního kužele $M=\{(x,y,z); x^2+y^2\le \frac{1}{4}z^2, 0\le z\le c\}$, hustota $\varrho(x,y,z)=z$.

4. M je část koule ohraničená plochami $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$.

5. M je část paraboloidu ohraničená plochami $x^2+y^2=2z, x+y=z$.

Výsledky:
1. $\frac{abc}{6}, \frac{4}{3}\pi R^2, \frac{4}{3}\pi abc, \pi R^2(b-a), \frac{\pi}{3}b^3, \frac{16}{9}(3\pi-4)R^3, 4\pi^2, \pi a^2 c$
2. $\frac{5}{6}, \frac{88}{105}, \frac{17}{12}-\ln 4, \frac{43}{32}\pi, \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{2}-1), 2\pi(d+\frac{d^3}{3})$
3. $[\frac{-a}{2}, \frac{8a}{5}], [\frac{a}{5}, \frac{a}{5}], [\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}], [\frac{a^2b}{14c}, \frac{a^2b}{14c}], [\frac{\pi a}{8}, \frac{\pi a}{8}]$
4. $[\frac{2}{3}a, \frac{3}{4}b, \frac{4}{5}c], [0,0,\frac{2}{3}c], [0,0,\frac{4}{5}c], [\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}], [1,1,\frac{5}{3}]$