

Analýza pro studenty Učitelství, LS druhého ročníku – příklady k procvičení, 2. série

Fubiniho věta, věta o substituci v dimenzi 2

V následujících příkladech je vždy třeba vypočítat hodnotu daného integrálu z dané funkce přes danou množinu A , případně určit míru dané množiny A , tj. počítat integrál z funkce konstantně rovné 1. Všechny příklady jsou zadány tak, že není zásadní problém „ve funkci“, nýbrž „v množině“ – tj. je třeba si nejprve množinu nakreslit a zvážit, zda lze použít přímo Fubiniho větu, a pokud ano (zejména jednali se o obdélník či trojúhelník se základnami rovnoběžnými se souřadnými osami), tak v jakém pořadí proměnných se bude integrovat. Pokud F.v. nelze použít, nebo vede na příliš složité výpočty, přijde vhod některá substituce. Na substituci se buď dá snadno přijít nebo se jedná o některou standardní substituci – viz níže.

Všechny obory integrace budou zadávány jako otevřené (případné koncové body nemají na hodnotu integrálu vliv, ale mohou dělat formální problémy při substitucích (φ musí být prostá)).

Označení: $(a, b) \times (c, d)$ znamená součin (otevřených) intervalů, tj. obdélník

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \in (a, b), y \in (c, d)\},$$

(proměnné jsou vždy uváděny v abecedním pořadí x, y, z). Dále $(a, b)^2 = (a, b) \times (a, b)$. Obdobně ve vyšších dimenzích. Dále označíme

$$K_R(s, t) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x - s)^2 + (y - t)^2 < R^2\}$$

kruh o středu (s, t) a poloměru R .

1. Integrály z funkcí přes obdélníky.

1. $\int_A x^3 y + xy^3 dx dy, \quad A = (0, 1)^2$
2. $\int_A x^y dx dy, \quad A = (0, 1)^2$
3. $\int_A y \sin(xy) dx dy, \quad A = (0, \sqrt{\pi})^2$
4. $\int_A \sin(x + y) + \cos(x - y) dx dy, \quad A = (0, \pi/2)^2$
5. $\int_A (x + y) \ln(1 + x + y) dx dy, \quad A = (-1, 1) \times (0, 1)$
6. $\int_A xy \ln(x^2 + y^2) dx dy, \quad A = (0, 1)^2$
7. $\int_A \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad A = \mathbf{R}_+^2$
8. $\int_A \frac{dx dy}{1 + x^2 y^2}, \quad A = \mathbf{R}_+^2$

2. Integrály z funkcí přes množinu A , kde A je trojúhelník, resp. čtyřúhelník se zadanými vrcholy.

1. $\int_A \sin(x + y) dx dy, \quad \text{vrcholy } (0, \pi/2), (0, -\pi/2), (\pi/2, 0)$
2. $\int_A x e^{x+y} dx dy, \quad \text{vrcholy } (0, 1), (-1, 0), (1, 0)$

3. $\int_A x^2 y^2 dx dy$, vrcholy $(0, 1), (0, -1), (2, 0), (-2, 0)$
4. $\int_A x^2 - y^2 dx dy$, vrcholy $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-2, 0)$
5. $\int_A e^{x-y} dx dy$, vrcholy $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

3. Integrály z funkcí přes množinu A , kde A je zadaná předpisem.

1. $\int_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^a}, a \in \mathbf{R}, A = K_1(0, 0)$
2. $\int_A (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), A = K_1(0, 0)$
3. $\int_A xye^{-x^2-y^2}, A = K_1(0, 0) \cap K_1(-1, 0) \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 0\}$
4. $\int_A \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, A = K_1(0, 0) \cap K_1(1, 0) \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 0\}$

4. Vypočtete plošný obsah množiny A , kde A je zadaná předpisem.

1. $A = K_R(0, 0)$
2. $A = K_1(0, 0) \cap K_1(1, 0)$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 < x^2 + y^2\}$

Výsledky:

1. $1/4; \ln 2; \sqrt{\pi}; 4; 1/2 + 3/2 \ln 2; 1/2 \ln 2 - 3/8; \pi/4; +\infty$
2. $1; e/4 - 5/4e; 8/45; 1; e - 1/e$
3. $\frac{\pi}{1-a}$ pro $a < 1$, $+\infty$ pro $a \geq 1$; $-\pi/4; (3 - 2e)/16e; 11/24$
4. $\pi R^2; 2\pi/3 - \sqrt{3}/4; \pi\sqrt{2}$