Písemka z Úvodu do matematické logiky, 11. 6. 2014

Jméno:

(1) Je formule $(p \vee \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$ tautologie? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište nějaké ohodnocení, které ji nesplňuje.

(2) Nechť $f : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ je Booleovská funkce, která je rovna 1 právě když aspoň 2 z argumentů jsou rovny 1. Napište nějakou DNF formuli, která tuto funkci definuje.

(3) Převeďte formuli $\neg\forall x \neg[A(x) \vee \neg\exists y B(y)]$ do prenexní formy.

(4) Je formule $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$ logicky platná? Jestli ne, najděte strukturu, kde neplatí.

(5) Podtrhněte všechny volné výskyty proměnných ve formuli

$$[\exists z(z+z>x)] \wedge [y>0 \to \forall y \exists x(x^2=y)]\ .$$

(6) $L = \{R(x,y)\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že každá L-struktura $\mathbf{M} = (M, R^M)$ splňuje ψ právě když: "R^M je ostré lineární uspořádání na nosiči M."

(7) Je pravdivé tvrzení: "Má-li ψ jen konečné modely, pak $\neg\psi$ má jen nekonečné modely?" Jestli ano, proč. Jestli ne, dejte příklad ψ pro níž tvrzení neplatí.

(8) $L = \{0, 1, +, \cdot\}$. Jsou L-struktury $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Q}$ (reálná čísla a racionální čísla při obvyklé interpretaci symbolů z L) elementárně ekvivalentní? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište L-sentenci pravdivou v $\mathbf{R}$ ale ne v $\mathbf{Q}$.

(9) $L = \{0, 1, x \circ y\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že ψ platí v $\mathbf{Z}$ (celá čísla) , je-li funkční symbol $\circ$ interpretován sčítáním, ale ne je-li interpretován násobením (konstanty 0 a 1 jsou interpretovány obvyklým způsobem).

(10) Napište nějakou formuli $\varphi(x)$ v jazyce $\{0, 1, +, \cdot\}$, která v $\mathbf{N}$ při obvyklé interpretaci L definuje právě množinu prvočísel.

(11) Napište (přesně) definici dobrého uspořádání.

(12) Nechť $f : \mathbf{N} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ je funkce. Definujte s pomocí f nějakou množinu $A \subseteq \mathbf{N}$, která **není** v oboru hodnot funkce f.