Písemka z Úvodu do matematické logiky, 28. 5. 2014

Jméno:

(1) Je formule $(p \wedge \neg p) \vee (q \to \neg q)$ splnitelná? Jestli ne, proč. Jestli ano, napište nějaké splňující ohodnocení.

(2) Nechť $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ je Booleovská funkce, která je rovna 1 právě když lichý počet argumentů je roven 1. Napište nějakou DNF formuli, která tuto funkci definuje.

(3) Převeďte formuli $\neg\exists x[A(x) \vee \neg\forall y B(x,y)]$ do prenexní formy.

(4) Je formule $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)$ logicky platná? Jestli ano, proč? Jestli ne, najděte strukturu, kde neplatí.

(5) Podtrhněte všechny volné výskyty proměnných ve formuli

$$[\forall y \exists z (x < z \vee z < y)] \ \vee [\exists x (x + z = y)] \ .$$

(6) $L = \{R(x,y)\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že každá L-struktura $\mathbf{M} = (M, R^M)$ splňuje ψ právě když: "R^M je relace ekvivalence na nosiči M."

(7) Je pravdivé tvrzení: "Splňují-li všechny konečné L-struktury L-sentenci ψ, pak též všechny nekonečné L-struktury splňují ψ?" Jestli ano, proč. Jestli ne, dejte příklad ψ pro níž to neplatí.

(8) $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$. Jsou L-struktury $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}$ (racionální čísla a celá čísla při obvyklé interpretaci symbolů z L) elementárně ekvivalentní? Jestli ano, proč. Jestli ne, napište L-sentenci pravdivou v $\mathbf{Q}$ ale ne v $\mathbf{Z}$.

(9) $L = \{0, 1, x \circ y\}$. Napište L-sentenci ψ takovou, že ψ platí v $\mathbf{R}$, je-li funkční symbol $\circ$ interpretován sčítáním, ale ne je-li interpretován násobením. Konstanty 0 a 1 jsou interpretovány obvyklým způsobem.

(10) Napište nějakou formuli $\varphi(x)$ v jazyce $\{0, 1, +, \cdot\}$, která v $\mathbf{R}$ při obvyklé interpretaci L definuje právě množinu kladných reálných čísel.

(11) Zakroužkujte ta uspořádání, která jsou dobrá:

$$(\mathbf{Z}, <)\ , \quad (\mathbf{N}, <)\ , \quad (\mathcal{P}(\mathbf{N}), \subset)\ , \quad (\mathbf{N}, <) \times (\mathbf{N}, <)$$

$$(\mathbf{N}, <) \times (\mathbf{Z}, <)\ , \quad (\mathbf{R}^{+}, <)\ , \quad (\mathbf{R}^{\geq 0}, <)\ ,$$

kde $\times$ je lexikograficky uspořádaný součin, $\mathbf{R}^{+}$ jsou kladná realná čísla a $\mathbf{R}^{\geq 0}$ jsou nezáporná realná čísla.

(12) Zformulujte (přesně) Zornovo lema.