AMPL a možnosti zápisu vícestupňových úloh SP

Jana Čerbáková

Stochastické programování a aproximace

16. Listopad 2006

Obsah

- Vícestupňová úloha stochastického programování
- Modelovací jazyk AMPL a AMPL Studio
- Zápis stromu scénářů pomocí AMPL
- Stochastické rozšíření AMPL - SAMPL, SPInE

Formulace T-stupňové úlohy - Here and Now

Nechť $\xi_t = (b_t, c_t, A_{t1}, \ldots, A_{tt})$ pro $t = 1, \ldots, T$.

$$\min_{x_1} \left\{ c_1 x_1 + E_{\xi_2} \left[\min_{x_2} c_2 x_2 + E_{\xi_3|\xi_2} \left(\min_{x_3} c_3 x_3 + \ldots + E_{\xi_T|\xi_{T-1}|\ldots|\xi_2} \min_{x_T} c_T x_T \right) \right] \right\}$$

za podmínek

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & & & & & & & & & = b_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & & & & & & & = b_2 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & & & & & = b_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
A_{T1}x_1 & + & A_{T2}x_2 & + & A_{T3}x_3 & + & \ldots & + & A_{TT}x_T & = b_T
\end{array}$$

$$l_t \le x_t \le u_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

Diskrétní úloha

Uvažujme ξ_t s diskrétním rozdělením $P(\xi_t), t = 1, \ldots, T$, s konečným počtem realizací $\Rightarrow$ strom scénářů.

- N_t množina uzlů v t-tém stupni
- π_n pravděpodobnost realizace uzlu $n \in N_t$, tj. $\pi_n = p\{\xi_t|\xi_{t-1}|\ldots|\xi_2\}$
- S množina scénářů, $|S| = |N_T|$
- π_s pravděpodobnost scénáře $s \in S$
- x_{ts} rozhodnutí ve stupni t při scénáři s
- B_n množina scénářů, jejichž cesta prochází uzlem n

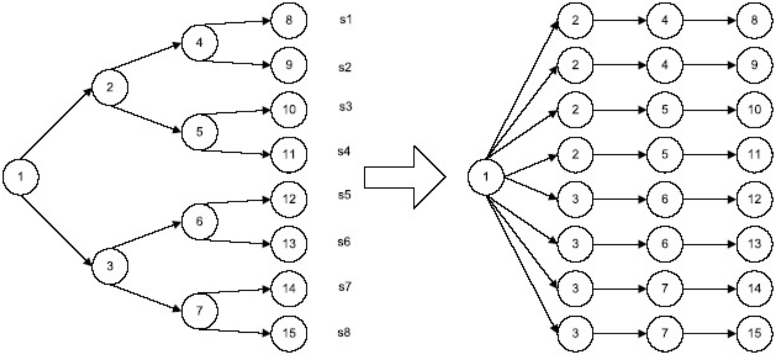
Explicitní formulace

$$\min \left[c_1 x_1 + \sum_{s \in S} \pi_s \sum_{t=2}^{T} c_{ts} x_{ts} \right]$$

za podmínek

$$\begin{array}{lllllllllll}
A_{11}x_1 & & & & & & & & & = b_1 & \\
A_{21s}x_1 & + & A_{22s}x_{2s} & & & & & & & = b_{2s} & \\
A_{31s}x_1 & + & A_{32s}x_{2s} & + & A_{33s}x_{3s} & & & & & = b_{3s} & \forall s \in S \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
A_{T1s}x_1 & + & A_{T2s}x_{2s} & + & A_{T3s}x_{3s} & + & \dots & & +A_{TTs}x_{Ts} & = b_{Ts} &
\end{array}$$

$$l_t \leq x_{ts} \leq u_t, \quad t = 1, \dots, T$$
$$x_{ts_i} = x_{ts_j}, \quad i \neq j, \forall s_i, s_j \in B_n$$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
s1
s2
s3
s4
s5
s6
s7
s8

Implicitní formulace

x_{tn} rozhodnutí ve stupni t pro všechny scénáře $s \in B_n, n \in N_t$

$$\min \left[c_1 x_1 + \sum_{t=2}^{T} \sum_{n \in N_t} \pi_n c_{tn} x_{tn} \right]$$

za podmínek

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & & & & & & & & & = b_1 & \\
A_{21n}x_1 & + & A_{22n}x_{2n} & & & & & & & = b_{2n} & n \in N_2 \\
A_{31n}x_1 & + & A_{32n}x_{2n} & + & A_{33n}x_{3n} & & & & & = b_{3n} & n \in N_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
A_{T1n}x_1 & + & A_{T2n}x_{2n} & + & A_{T3n}x_{3n} & + & \dots & & +A_{TTn}x_{Tn} & = b_{Tn} & n \in N_T
\end{array}$$

$$l_t \leq x_{tn} \leq u_t, \quad t = 1, \dots, T, \forall n$$

Implicitní x Explicitní reprezentace úlohy

Explicitní formulace

- explicitně přidaná neanticipativní omezení zvyšují dimenzi úloh
- zbytečné replikování proměnných a omezení, při zápisu mohou vznikat chyby
- řídká struktura matice v omezení
- vhodné metody vnitřního bodu [Lustig et al. (1991)]

Implicitní formulace

- menší dimenze úlohy
- snadnější zápis
- vhodné řešit pomocí simplexových nebo dekompozičních metod

Wait and See

Nechť realizace $\xi_t = (b_t, c_t, A_{t1}, \ldots, A_{tt})$ pro $t = 1, \ldots, T$, jsou známy.

Pak řešíme úlohu:

$$\min_x \left[c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_T x_T\right]$$

za podmínek

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & & & & & & & & & = b_1 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & & & & & = b_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
A_{T1}x_1 & + & A_{T2}x_2 & + & A_{T3}x_3 & + & \ldots & + & A_{TT}x_T & = b_T
\end{array}$$

$$l_t \leq x_t \leq u_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

Expectation EEV

Pokud za $\xi_t = (b_t, c_t, A_{t1}, \dots, A_{tt})$ pro $t = 1, \dots, T$, dosadíme $\bar{\xi} = E\xi$.
Řešíme úlohu *Expected Value*, optimální řešení označme x_1^{EV}.

$$EEV = \min \left[c_1 x_1^{EV} + \sum_{t=2}^{T} \sum_{n \in N_t} \pi_n c_{tn} x_{tn} \right]$$

za podmínek

$$\begin{array}{lllllllllll}
A_{11} x_1^{EV} & & & & & & & & & = b_1 & \\
A_{21n} x_1^{EV} & + & A_{22n} x_{2n} & & & & & & & = b_{2n} & n \in N_2 \\
A_{31n} x_1^{EV} & + & A_{32n} x_{2n} & + & A_{33n} x_{3n} & & & & & = b_{3n} & n \in N_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
A_{T1n} x_1^{EV} & + & A_{T2n} x_{2n} & + & A_{T3n} x_{3n} & + & \dots & & + A_{TTn} x_{Tn} & = b_{Tn} & n \in N_T
\end{array}$$

$$l_t \leq x_{tn} \leq u_t, \quad t = 1, \dots, T, \forall n$$

Expected Value of Perfect Information EVPI = HN-VS
Value of the Stochastic Solution VSS = EEV-HN

Modelovací jazyky

Umožňují vyjádřit problém v indexované matematické podobě:
sets, indices, parameters, variables, constraints, objectives

- GAMS
- AMPL
- MPL
- AIMMS

AMPL Studio - www.ampl.com

- AMPL studio je nové uživatelské grafické rozhraní pro jazyk AMPL, řešiče (CPLEX, MINOS, FortMP a další)
- vyvinul Dr. Mustapha Sadki v letech 2003-2006, je majetkem Datumatic Ltd UK
- distributorem je OptiRisk Systems
- zdarma studentská verze umožňující řešit úlohy do 300 proměnných
- umožňuje načítání dat a zapisování výsledků do MS Access a MS Excel
- obsahuje generátor MPS formátu

AMPL Studio - podporované řešiče

Lineární (simplex, vnitřní, bariérové metody) CPLEX, FortMP, MINOS, BPMPD, PCx, CBC, LP_SOLVER, MINTO, OOQP, XLSOL

Network OSL

Kvadratické CPLEX, FortMP, LOQO, MOSEK, SOPT

Nelineární konvexní/nekonvexní CONDOR, CONOPT, MINOS, KNITRO, IPOPT, PENNON, SNOPT, ACRS, BLMVM, DONLP2, FSQP, GRG2, IPOPT, LANCELOT, L-BFGS-B, NPSOL, NSIPS, TRON

S podmínkami komplementarity PATH

Celočíselné lineární LAMPS, WSAT(OP), XA, LS-XLSOL, Xpress-MP

Celočíselné nelineární Bonmin, FILTER/MINLP, LSGRG, MINLP, MOSEK

Jednoduchý investiční deterministický problém

Investor chce pořídit portfolio s minimálním rizikem do $200000 tak, aby

1. roční míra výnosnosti portfolia byla alespoň 9%,
2. do jedné akcie nesmí jít více než 50% z celkem investované částky.

Akcie	A	B	C	D	
Cena za akcii	$100	$50	$80	$40	p_i
Roční výnosnost	0.12	0.08	0.06	0.10	v_i
Míra rizika na investovanou $1	0.10	0.07	0.05	0.08	r_i

Řešíme úlohu $\min \sum_{i=1}^{4} r_i p_i x_i$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{4} p_i x_i \leq 200000,$$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i v_i x_i \geq 200000 \cdot 0.9,$$

$$100x_1 \leq 100000, 50x_2 \leq 100000, 80x_3 \leq 100000, 40x_4 \leq 100000,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

ALM model

Investor chce vytvořit portfolio tak, aby maximalizoval očekávanou cenu portfolia na konci časového horizontu T. Budoucí hodnoty jednotlivých aktiv jsou modelovány pomocí stromu scénářů.

- I množina dostupných aktiv
- Sc množina scénářů
- c_{its} cena aktiva $i \in I$, v čase $t = 1, \ldots, T$, při scénáři $s \in S$
- p_s pravděpodobnost scénáře $s \in S$
- L_t očekávané závazky v čase $t = 1, \ldots, T$
- F_t dostupná hotovost v čase $t = 1, \ldots, T$
- A_t předepsané cíle v čase $t = 1, \ldots, T$
- H_{0i} počáteční složení portfolia, $i \in I$
- R maximální akceptovatelná odchylka od předepsaného cíle
- g transakční náklady

ALM model

H_{its} množství drženého aktiva $i \in I$, v čase $t = 1, \dots, T$, při scénáři $s \in S$

B_{its} množství koupeného aktiva $i \in I$, v čase $t = 1, \dots, T$, při scénáři $s \in S$

S_{its} množství prodaného aktiva $i \in I$, v čase $t = 1, \dots, T$, při scénáři $s \in S$

$$\max \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in I} c_{iTs} H_{iTs}$$

$$\begin{aligned}
\text{za podmínek } H_{its}, B_{its}, S_{its} \geq 0, &\quad t = 1, \dots, T, i \in I, s \in S, \\
H_{its} = H_{0i} + B_{its} - S_{its}, &\quad t = 1, i \in I, s \in S, \\
H_{its} = H_{it-1s} + B_{its} - S_{its}, &\quad t > 1, i \in I, s \in S, \\
(1-g) \sum_{i \in I} c_{its} S_{its} - L_t + F_t = (1+g) \sum_{i \in I} B_{its}, &\quad t = 1, \dots, T, s \in S, \\
A_t - \sum_{i \in I} c_{its} H_{its} \leq A_t R_t, &\quad t = 2, \dots, T, s \in S.
\end{aligned}$$

Formulace scénářů v AMPL

Strom scénářů se skládá z:

- *base/root scenario*, tj. jeden scénář procházející od kořene všemi stavy úlohy
- jednoho nebo více dalších scénářů sdílejících kořen

  parent scenario rodič, s kterým scénář sdílí poslední větev před oddělením

  start period stupeň, ve kterém se scénář oddělí od rodiče

Struktura stromu scénářů je definována:

- počtem stupňů
- množinou indexující scénáře
- množinou rodičů
- *starting period* stupni
- pravděpodobnostmi všech scénářů

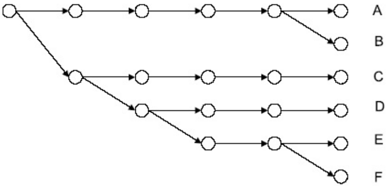
Pro každý stupeň a každý scénář, který není sdílen s rodičem, je nutné dodefinovat parametry, proměnné a omezení.

Formulace scénářů v AMPL - pevný horizont

Předpokládejme náhodné proměnné závislé na stupni a předchozí historii. Podmínka neanticipativnosti je zahrnuta implicitně.

Scénář	Start	Parent
A	1	kořen
B	6	A
C	2	A
D	3	C
E	4	D
F	6	E

	1	2	3	4	5	6
A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	B
C	A	C	C	C	C	C
D	A	C	D	D	D	D
E	A	C	D	E	E	E
F	A	C	D	E	E	F



param label {s in SCENARIOS, t in PERIODS}
symbolic in SCEN :=
(if t >= starttime[s]
then s
else label[parent[s],t]);

SAMPL/SPInE

- stochastické rozšíření AMPL začleněno do stochastického modelovacího prostředí SPInE
- kombinuje modelovácí systém s řešičem
- vyvinuto Dr. P. Valentem v CARISMA (The Centre for the Analysis of Risk and Optimization Modelling Applications) pod vedením Prof. G. Mitry
- systém je dostupný
  - jako samostatná aplikace
  - jako součást AMPL Studia
  - jako knihovna, která se připojuje dynamicky za běhu programu
- solver FortSP (stochastické rozšíření FortMP), využívá vstupy v SMPS formátu, jejichž generátor AMPL Studio obsahuje
- plně podporuje scénářové lineární modely s kompenzací (dvoustupňové, vícestupňové)
- pravděpodobnostní omezení (v omezené míře)

Implementováné algoritmy

SP model	Algoritmus
Dvoustupňová SLP	DEQ explicit
	DEQ implicit
	Bender's decomp.
	Stochastic decomp.
	Bender's importance sampling
Celočíselné dvoustupňové SP	Lagrangian relaxation
	Lagrangian relaxation and importance sampling
Vícestupňové SP	Universe
	Nested Bender's
	Nested Bender's and importance sampling
	EVPI-based importance sampling

Položky menu Stochastic

Check Syntax zkontroluje syntaxi úlohy zapsané v SAMPL

Solve SPInE řeší aktivní model

Generate generuje SMPS zápis úlohy

Solve Current řeší naposledy vygenerovanou úlohu v SMPS formátu

Generate Options nastavení generování SMPS formátu

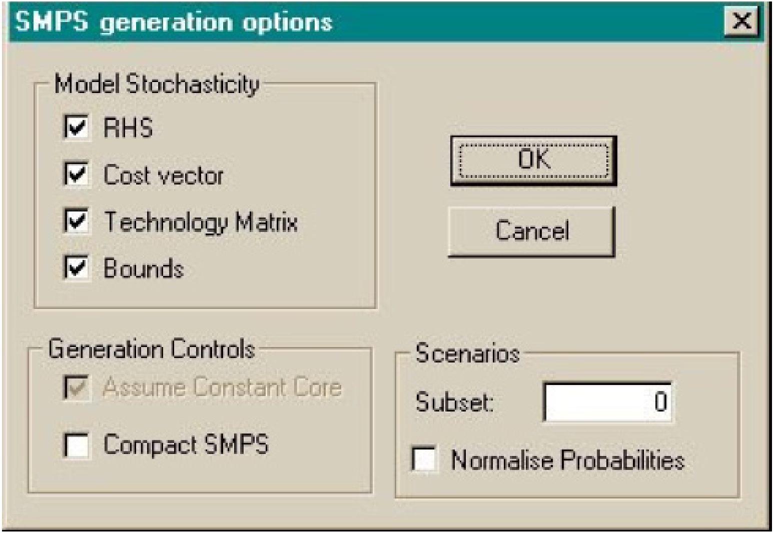
Solver Options nastavení systému SAMPL/SPInE

Export Options nastavení výstupu s řešením

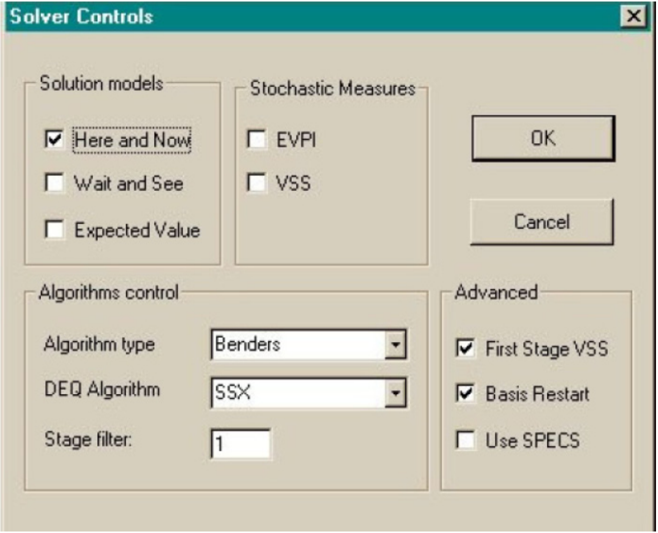
View Options List zobrazí aktuální nastavení systému SAMPL/SPInE

Solve first scenario řeší aktivní úlohu pro první scénář

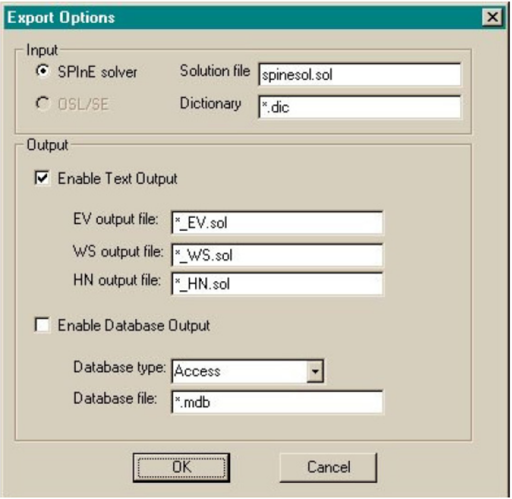
Generate Options



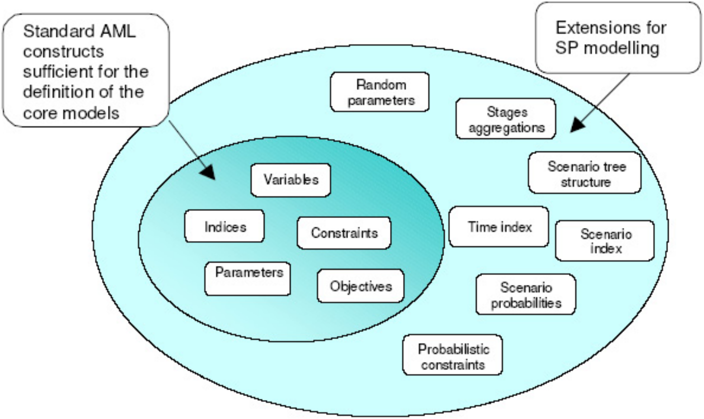
Solver Options



Export Options

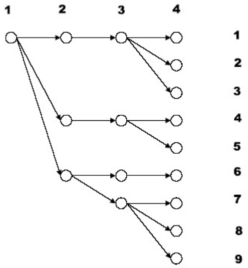


Generate Options



tree name:=$_{opt}$ tree_declaration ;
kde za $<$tree_declaration$>$ můžeme volit:

- bundle_list:
  bundles$\{$Bundle-1$(stage_1, scen_1), \ldots,$ Bundle-n$(stage_n, scen_n)\}$
  např.:

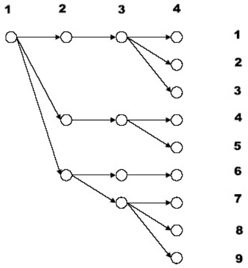


tree theTree:=**bundels**$\{$
$(1,1),$
$(2,1),(2,4),(2,6),$
$(3,1),(3,4),(3,6),(3,7),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9)\};$

SAMPL - definice stromů

tree name:$=_{opt}$ tree_declaration ;
kde za <tree_declaration> můžeme volit:

- **tlist**$\{n_1, n_2, \ldots, n_s\}$
  např.: **tree** theTree:=**tlist**$\{1, 4, 4, 2, 4, 2, 3, 4, 4\}$;
- **nway**$\{n\}$
  v každém stupni $\sigma = 1, \ldots T-1$, konstantní počet n-větví
  celkový počet scenářů $S = n^{T-1}$
- **multibranch**$\{n_1, n_2, \ldots, n_T\}$
  v každém stupni $\sigma = 1, \ldots T-1$, je právě u každého uzlu n_σ větví
  celkový počet scénářů $S = \prod_{\sigma=1}^{T-1} n_\sigma$
- **binary**
- **twostage**$\{S\}$



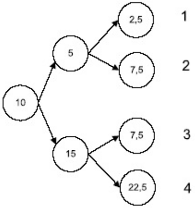
SAMPL - náhodná data

$\text{set } T := 1..3;$ definuje stupně

$\text{scenarioset } S := 1..4;$ definuje množinu scénářů

$\text{probability param } P\{S\} := 1/card\{S\};$ pravděpodobnosti scénářů

$\text{random param dem}\{T, S\};$ deklaruje náhodné parametry



t=1	t=2	t=3	Scénář
10	5	2.5	1
10	5	7.5	2
10	15	7.5	3
10	15	22.5	4

expanded scenario data

t=1	t=2	t=3	Scénář
10	5	2.5	1
		7.5	2
	15	7.5	3
		22.5	4

compact scenario data

SAMPL - náhodná data

Compact scenario data jsou reprezentována 2-dim maticí, kde pouze některé prvky jsou neprázdné. Sloupce představují stupně, řádky scénáře. Prvky matice musí splňovat:

1. $[1, 1]$ musí existovat
2. $[T, s]$ musí existovat $\forall s \in S$
3. pokud existuje $[t, s]$ pro nějaké $t < T$, pak musí existovat $[t + 1, s]$

SAMPL zápis:
random param dem$\{T, S\}$;
random param dem:=

1	1	10
2	1	5
2	3	15
3	1	2.5
3	2	7.5
3	3	7.5
3	4	22.5;

SAMPL - náhodná data

Expanded scenario data jsou reprezentována 2-dim maticí, kde všechny prvky jsou vyplněny.

SAMPL zápis:

random param dem$\{T, S\}$;
random param dem $\{tr\}$:=

	1	2	3
1	10	2	2.5
2	10	5	7.5
3	10	15	7.5
4	10	15	22.5;

SAMPL - pravděpodobnostní omezení

chance indexing$_{opt}$ constraint_name relop expression;
kde za relop dosazujeme

- $=$
- $\leq$
- $\geq$

SAMPL příklad:
scenarioset S:=1..NS;

random param d[I,T,S] $\geq$ 0;
param beta:=0.9;

omezeni {i in I, t in T, s in S}: sum{j in J} z[i,j,t,s] $\geq$ d[i,t,s]

chance {i in I, t in T, s in S} omezeni [i,t,s] $\geq$ beta;

Plánovaná rozšíření

- SPInE dokáže řešit jen vícestupňové úlohy založené na stromu scénařů. Nedokáže řešit *scenario-based* úlohy.
- Není možné modelovat závislosti náhodných parametrů v různých scénařích. Zavést podmíněné pravděpodobnosti.
- Doposud je možné využívat generátory scénářů, které umí generovat výstupy do ODBC databází a testových souborů. Tyto výstupy se pak načtou do SPInE. Integrovat generování scénářů.
- Autoři chtějí vyvinout solver schopný řešit kvadratické nerovnosti.

Děkuji za pozornost.