Úvod do diskrétní pravděpodobnosti

Andrew Kozlík

KA MFF UK

Definice

Množina elementárních jevů je množina všech možných výsledků náhodného pokusu. Tuto množinu značíme Ω.

Příklad

Házíme dokonale symetrickou kostkou a zaznamenáváme číslo, které padlo. Potom $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definice

Nechť

- Ω je spočetná množina a
- $\Pr : \Omega \to [0, 1]$ je zobrazení takové, že $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) = 1$.

Potom

- říkáme, že $(\Omega, \Pr)$ *diskrétní pravděpodobnostní prostor*,
- prvky množiny Ω nazýváme *elementární jevy* a
- $\Pr(\omega)$ nazýváme *pravděpodobnost* elementárního jevu ω.

Náhodný jev

Definice

Libovolná podmnožina $E \subseteq \Omega$ se nazývá *(náhodný) jev*.
Definujeme

- $\Pr(E) = \sum_{\omega \in E} \Pr(\omega)$,
- $\Pr(\emptyset) = 0$.

Značení

$\Pr(E_1, E_2, \ldots, E_n) := \Pr(E_1 \cap \cdots \cap E_n)$.

Příklad

- Jev, že na kostce padne liché číslo: $E_1 = \{1, 3, 5\}$.
  $\Pr(E_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
- Jev, že na kostce padne prvočíslo: $E_2 = \{2, 3, 5\}$.
- Pravděpodobnost, že na kostce padne liché prvočíslo:
  $\Pr(E_1, E_2) = \Pr(\{3, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Náhodná veličina

Definice

Nechť

- A je konečná množina a
- $X : \Omega \to A$ je zobrazení.

Potom

- říkáme, že X je *diskrétní náhodná veličina*, a
- pro každé $a \in A$ definujeme jev $\{\, \omega \in \Omega : X(\omega) = a \,\}$, který značíme „$X{=}a$“.

Máme tedy

$$\Pr(X{=}a) = \Pr(\{\, \omega \in \Omega : X(\omega) = a \,\}) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=a}} \Pr(\omega).$$

Náhodná veličina

$$\Pr(X{=}a) = \Pr(\{\,\omega \in \Omega : X(\omega) = a\,\}) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=a}} \Pr(\omega).$$

Příklad

Nechť

- $X : \Omega \to \{0, 1\}$
- $X : \omega \mapsto \omega \bmod 2$

Potom

$$\Pr(X{=}1) = \Pr(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Definice

Nechť $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ jsou náhodné jevy takové, že $\Pr(E_2) \neq 0$. Potom definujeme *podmíněnou pravděpodobnost*

$$\Pr(E_1 \mid E_2) := \frac{\Pr(E_1, E_2)}{\Pr(E_2)}$$

(čteme „pravděpodobnost E_1 za podmínky E_2“).

Definice

Nechť $X : \Omega \to A$ a $Y : \Omega \to B$ jsou diskrétní náhodné veličiny. Jestliže $\Pr(X{=}a, Y{=}b) = \Pr(X{=}a) \Pr(Y{=}b)$ pro všechna $a \in A$ a $b \in B$, pak říkáme, že X a Y jsou *nezávislé*.

Pozorování

X a Y jsou nezávislé, právě když $\Pr(X{=}a \mid Y{=}b) = \Pr(X{=}a)$ pro všechna $a \in A$ a $b \in B$ takové, že $\Pr(Y{=}b) \neq 0$.

Věta (o úplné pravděpodobnosti)

Nechť $E_1, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ jsou po dvou disjunktní jevy takové, že $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$.
Potom pro libovolný jev $E \subseteq \Omega$ platí

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E, E_i).$$

Důkaz.

Zjevně platí:

- $(E \cap E_i)$ a $(E \cap E_j)$ jsou disjunktní pro $i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^n (E \cap E_i) = E \cap \Omega = E$.

Vezmeme pravou stranu a $\Pr(E, E_i)$ rozepíšeme podle definice:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr(E, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in E \cap E_i} \Pr(\omega) = \sum_{\omega \in E} \Pr(\omega) = \Pr(E).$$

□

Věta (o úplné pravděpodobnosti)

Nechť $E_1, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ *jsou po dvou disjunktní jevy takové, že* $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.
Potom pro libovolný jev $E \subseteq \Omega$ *platí*

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(E, E_i).$$

Důsledek

Nechť $X : \Omega \to A$ *a* $Y : \Omega \to B$ *jsou diskrétní náhodné veličiny a* $a \in A$.
Potom

$$\Pr(X = a) = \sum_{b \in B} \Pr(X{=}a, Y{=}b).$$

Střední hodnota

Definice

Nechť $X : \Omega \to A$ je diskrétní náhodná veličina, kde $A \subset \mathbb{R}$.
Potom definujeme *střední hodnotu*

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) X(\omega).$$

Příklad

Náhodná veličina X udává výsledek hodu kostkou.
Potom $\mathrm{E}\,X = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$

Tvrzení

Nechť

- $X : \Omega \to A$ *je diskrétní náhodná veličina a*
- $f : A \to \mathbb{R}$ *je zobrazení.*

Potom

$$\mathrm{E}\, f(X) = \sum_{a \in A} \Pr(X = a) f(a).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\sum_{a \in A} \Pr(X = a) f(a) &= \sum_{a \in A} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = a}} \Pr(\omega) f(a) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega) f(X(\omega)) = \mathrm{E}\, f(X).\end{aligned}$$

$\square$

Rovnoměrné rozdělení

Definice

Nechť $X : \Omega \to A$ je diskrétní náhodná veličina.
Jestliže
$$\Pr(X{=}a) = \frac{1}{|A|} \quad \text{pro všechna } a \in A,$$
pak říkáme, že X má *rovnoměrné rozdělení*,

Příklad

- Nechť $X : \Omega \to A$ je diskrétní náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- Spočítáme $\mathrm{E}\, X^2$ dvěma způsoby.
- Nemusíme vůbec znát Ω!
- První způsob:
  - Spočítáme rozdělení pravděpodobnosti veličiny X^2: $\Pr(X^2 = 0) = \frac{1}{5}$, $\Pr(X^2 = 1) = \frac{2}{5}$ a $\Pr(X^2 = 4) = \frac{2}{5}$
  - Dosadíme do definice střední hodnoty: $\mathrm{E}\, X^2 = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 4 = 2$.
- Druhý způsob:
  V předchozím tvrzení dosadíme za f zobrazení $x \mapsto x^2$:
  $\mathrm{E}\, X^2 = \frac{1}{5} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{5} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{5} \cdot 0^2 + \frac{1}{5} \cdot 1^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^2 = 2$.