Psaní na mokrý papír

Andrew Kozlik

KA MFF UK

Motivace

- **Problém:** Vkládání do některých prvků nosiče má vysoký dopad na detekovatelnost.
- PNG/GIF: Oblasti s nízkou texturou.
- JPEG: Nulové AC koeficienty.
- **Řešení:** Při vkládání i extrakci budeme tyto citlivé prvky přeskakovat.
- **Nový problém:** Proces vkládání může mít za následek, že
  - textura oblasti klesne pod prahovou hodnotu, nebo
  - nenulový AC koeficient se vynuluje.

  Příjemce prvky přeskočí a vložená informace je tak ztracena.
- **Řešení:** Dojde-li ke ztrátě, vložíme informaci znovu.
- U JPEGu vede ke smrštění kapacity o cca 25 %.

Přirovnání k psaní na mokrý papír

- Máme obrázek na papíře.
- Některé pixely jsou suché, jiné mokré.
- Suché smíme upravovat, mokré nikoliv.
- Upravený obrázek odešleme, ale ten cestou uschne.
- Příjemce nepozná, kam jsme vložili zprávu, protože neví, které pixely byly suché a které nikoliv.

Věta (o mokrém nosiči)

Pro každé $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *a* $\sigma \in [0,1]$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *a stegosystém takový, že do nosiče velikosti* n *symbolů, z nichž* σn *je suchých, lze s pravděpodobností alespoň* $1 - \delta$ *vložit informaci velikosti* $(\sigma - \varepsilon)n$ *symbolů.*

Důkaz.

- Nechť Σ je množina symbolů a $q := |\Sigma|$.
  (Typicky $\Sigma = \mathbb{F}_2$ nebo $\Sigma = \mathbb{F}_3$.)
- Nechť Z je množina zpráv velikosti $|Z| = q^{(\sigma-\varepsilon)n}$.
- Konstrukce stegosystému:
  - Vytvoříme kódovou knihu $\mathcal{B} = \{ \mathcal{P}_{\mathbf{z}} : z \in Z \}$.
  - Stránky knihy $\mathcal{P}_{\mathbf{z}}$ jsou indexovány množinou zpráv Z.
  - Slova z množiny Σ^n rozmístíme do knihy náhodně tak, aby na každé stránce bylo $q^{(1-\sigma+\varepsilon)n}$ slov.
  - Čili $\Sigma^n = \bigcup\!\!\cdot_{z \in Z} \mathcal{P}_{\mathbf{z}}$.

Důkaz (pokračování).

- Příjemce a odesílatel kódovou knihu sdílejí.
- **Vkládání:**
  - Vstup: Nosič $x \in \Sigma^n$ s $n - \sigma n$ mokrými prvky a zpráva $z \in Z$.
  - Pokusíme se na stránce $\mathcal{P}_{\mathbf{z}}$ najít n-tici, která se na mokrých pozicích shoduje s nosičem.
  - Podaří-li se, je nalezená n-tice stegoobjektem a mokré pozice zůstávají nezměněny.
- **Extrakce:**
  - Vstup: Stegoobjekt $y \in \Sigma^n$.
  - Vyhledáme y v knize. Podíváme se na index stránky, na které jsme y našli a zpráva $=$ index.

Důkaz (pokračování).

- Podaří se vkládacímu algoritmu najít na stránce $\mathcal{P}_{\mathbf{z}}$ n-tici, která má na $n - \sigma n$ určených pozicích určené hodnoty?
- V celé knize je takových n-tic dohromady $q^{\sigma n}$.
- Jaká je pravděpodobnost, že žádná z nich není v $\mathcal{P}_{\mathbf{z}}$?
- $\mathcal{P}_{\mathbf{z}}$ vznikla náhodným výběrem $q^{n-\sigma n+\varepsilon n}$ prvků z Σ^n.
- Pravděpodobnost selhání p je méně než

$$p < \left(\frac{q^n - q^{\sigma n}}{q^n}\right)^{q^{n-\sigma n+\varepsilon n}} = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{-1}{q^{n(1-\sigma)}}\right)^{q^{n(1-\sigma)}}}_{\text{jde k } e^{-1} \approx 0{,}37 \text{ pro } n \to \infty}\right)^{q^{\varepsilon n}}.$$

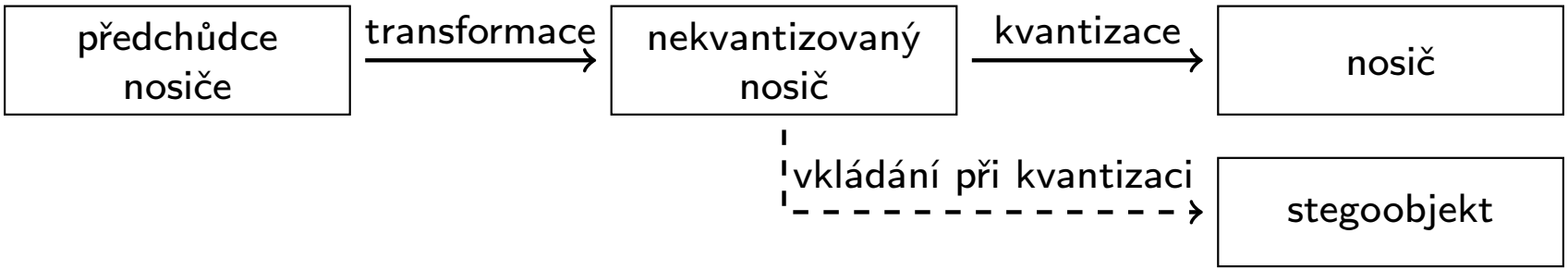
- Pro dostatečně velká n je označený výraz menší než $\frac{1}{2}$.
- Od jistého n tedy platí $p < (\frac{1}{2})^{q^{\varepsilon n}} \to 0$.

□

Praktické řešení

- Algoritmy z důkazu označme:
  - $y = \mathrm{Emb}_{\mathcal{B}}(x, S, z)$.
  - $z = \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}(y)$.
  - $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je množina indexů suchých složek nosiče.
- Pomocí samoopravného kódu $\mathcal{C}$:
  - $\Sigma = \mathbb{F}_q$.
  - $\mathcal{B} = \mathbb{F}_q^n / \mathcal{C}$.
  - $\mathcal{P}_{\mathbf{z}} = \mathcal{C}(\mathbf{z})$.
  - $\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_q^n/\mathcal{C}} = \mathbf{Hy}$, kde $\mathbf{H}$ je paritní matice kódu $\mathcal{C}$.
- Lze tedy využít maticové vkládání. Cílem však není minimalizovat počet změn, ale zajistit, aby k nim docházelo jen na určených pozicích.

Vkládání při kvantizaci



- Kvantizace: Zaokrouhlení na nejbližší povolenou hodnotu.
- Množina povolených hodnot může být např. $\{0, 1, \ldots, 255\}$ nebo $\{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$.
- Příklady transformací:
  - Snížení hloubky barev rastrového obrázku.
  - Zmenšení rozměrů rastrového obrázku a intrpolace.
  - Blok 8×8 hodnot jasové složky obrázku na blok 8×8 DCT koeficientů.

Příklady kvantizace vs. vkládání při kvantizaci

- Množina povolených hodnot je $\mathbb{Z}$.
- Nezaokrouhlený prvek: $\tilde{x}_i = 14{,}9$.
- Kvantizace: Zaokrouhlíme na 15. Distorze je $0{,}1^2$.
- Vkládání při kvantizaci:
  - Vložení bitu 0: Zaokrouhlíme na 14. Distorze je $0{,}9^2$.
  - Vložení bitu 1: Zaokrouhlíme na 15. Distorze je $0{,}1^2$.
  - Průměrná distorze při vkládání $(0{,}9^2 + 0{,}1^2)/2 = 0{,}41$.
- Vkládáním při kvantizaci se distorze v průměru zvýší o $\rho_i = 0{,}41 - 0{,}01 = 0{,}4$.
- Jiný příklad: $\tilde{x}_i = 14{,}5$.
- Vkládáním se distorze nezvýší. Říkáme, že $\tilde{x}_i$ je *nestranný*.

Využití psaní na mokrý papír

- Ke každému $\tilde{x}_i$ přiřadíme ρ_i:

  $\rho_i =$ (průměrná distorze při vkládání)$-$(distorze při zaokrouhlení)

- Je-li množina povolených hodnot $\mathbb{Z}$, pak

$$\begin{aligned} \delta_i &= \mathsf{dist}(\tilde{x}_i, \mathbb{Z}) = |[\tilde{x}_i] - x_i| \\ \rho_i &= \frac{\delta_i^2 + (1-\delta_i)^2}{2} - \delta_i = \frac{1}{2} - \delta_i. \end{aligned}$$

- Množinu S volíme tak, aby součet $\sum_{i \in S} \rho_i$ byl minimální.

- Vkládání provádíme usměrněním zaokrouhlení.

Vkládání při dvojité ztrátové kompresi

- **Problém:** Chceme nestranné prvky, ale ty jsou vzácné.
- **Řešení:** Vyrobíme je přirozenou cestou.
- Předchůdce nosiče: JPEG s faktorem kvality f_1.
- Transformace: Rekomprimace obrázku na nižší kvalitu f_2.
- Za příznivých okolností vznikne v nekvantizovaném nosiči nosiči hodně nestranných DCT koeficientů.
- Pro $f_1 = 85$ a $f_2 = 70$ je jich v našem cvičném obrázku 14 % z celkového počtu všech koeficientů.

Příklad kvantizačních matic

$$\mathbf{Q}^{(85)} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & 3 & \boxed{\mathbf{3}} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{12} & 15 & 18 \\ 4 & 4 & \mathbf{4} & 6 & \mathbf{8} & 17 & \mathbf{18} & 17 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{12} & \mathbf{17} & 21 & \mathbf{17} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & 7 & 9 & 15 & \mathbf{26} & \mathbf{24} & 19 \\ 5 & 7 & \mathbf{11} & \mathbf{17} & 20 & 33 & \mathbf{31} & \mathbf{23} \\ \mathbf{7} & 11 & 17 & \mathbf{19} & 24 & \mathbf{31} & \mathbf{34} & 28 \\ 15 & \mathbf{19} & 23 & \mathbf{26} & \mathbf{31} & 36 & \mathbf{36} & 30 \\ 22 & 28 & 29 & 29 & 34 & \mathbf{30} & \mathbf{31} & 30 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(70)} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & 7 & \boxed{\mathbf{6}} & \mathbf{10} & \mathbf{14} & \mathbf{24} & 31 & 37 \\ 7 & 7 & \mathbf{8} & 11 & \mathbf{16} & 35 & \mathbf{36} & 33 \\ \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{14} & \mathbf{24} & \mathbf{34} & 41 & \mathbf{34} \\ \mathbf{8} & \mathbf{10} & 13 & 17 & 31 & \mathbf{52} & \mathbf{48} & 37 \\ 11 & 13 & \mathbf{22} & \mathbf{34} & 41 & 65 & \mathbf{62} & \mathbf{46} \\ \mathbf{14} & 21 & 33 & \mathbf{38} & 49 & \mathbf{62} & \mathbf{68} & 55 \\ 29 & \mathbf{38} & 47 & \mathbf{52} & \mathbf{62} & 73 & \mathbf{72} & 61 \\ 43 & 55 & 57 & 59 & 67 & \mathbf{60} & \mathbf{62} & 59 \end{pmatrix}$$

- DCT koeficienty na pozici (1,3) v předchůdci nosiče jsou zaokrouhlovány na násobek 3.
- Při snížení kvality se zaokrouhlují na násobek 6.
- Téměř polovina bloků bude mít na této pozici nestranný DCT koeficient.
- Na pozicích s větším kvantizačním koeficientem bude nestranných výrazně méně než polovina, např. 5 %.
  (V předchůdci nosiče je totiž většina zaokrouhlena na 0.)

Dvojitá ztrátová komprese

- Nejlepších výsledků se dosahuje, když se berou nestranné DCT koeficienty z bloků s vysokou neuniformitou.
- Neuniformitu můžeme například měřit jako součet čtverců DCT koeficientů v bloku (energie bloku).
- Shrnutí:
  - Máme zprávu délky m, potřebujeme počet suchých $s > m$.
  - Postupně nabíráme nestranné koeficienty do S, dokud jich nemáme dost.
  - Přednostně vybíráme koeficienty z nejvíce neuniformních bloků.

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Jednoduché ± 1 vkládání zprávy $\mathbf{z} \in \{0,1\}^m$ do nosiče $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$:

- Jestliže $\mathrm{LSB}(x_i) = z_i$, pak $y_i := x_i$.
- Jestliže $\mathrm{LSB}(x_i) \neq z_i$, pak $y_i := x_i + a$, kde $a \in_{\mathcal{R}} \{-1, 1\}$.
- Obrana proti kvantitativním útokům na LSB embedding.

Rozhodnutí přičíst anebo odečíst 1 nám dává plnou kontrolu nad hodnotou druhého nejnižšího bitu:

	Poslední dvě cifry binárního rozvoje			
x_i	$(\ldots 00)_2$	$(\ldots 01)_2$	$(\ldots 10)_2$	$(\ldots 11)_2$
$x_i + 1$	$(\ldots 01)_2$	$(\ldots 10)_2$	$(\ldots 11)_2$	$(\ldots 00)_2$
$x_i - 1$	$(\ldots 11)_2$	$(\ldots 00)_2$	$(\ldots 01)_2$	$(\ldots 10)_2$

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Značení:

- $\mathbf{H}$ je paritní matice $[n, n - m_1]_2$ kódu $\mathcal{C}$ s průměrnou vzdáleností r_{a}, relativní kapacitou α a efektivitou e.
- $\mathcal{B}$ je kódová kniha, která umožňuje vkládat m_2 bitů do nosiče délky n bitů, z nichž r_{a} je suchých.
- $\mathbf{x}'$ a $\mathbf{y}'$ vektor nejnižších bitů nosiče a stegoobjektu.
- $\mathbf{x}''$ a $\mathbf{y}''$ vektor druhých nejnižších bitů nosiče a stegoobjektu.
- Zpráva má dvě části $\mathbf{z}' \in \mathbb{F}_2^{m_1}$ a $\mathbf{z}'' \in \mathbb{F}_2^{m_2}$.

Extrakce:

$$\mathbf{z}' = \mathsf{Ext}_{\mathbf{H}}(\mathbf{y}') \quad \text{a} \quad \mathbf{z}'' = \mathsf{Ext}_{\mathcal{B}}(\mathbf{y}'').$$

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Vkládání:

- První zpráva bude vložena maticovým vkládáním

$$\mathbf{y}' = \mathrm{Emb}_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}', \mathbf{z}').$$

- Na pozicích, kde dochází ke změnám, jsme schopni ovlivnit druhý nejnižší bit. Tyto označíme jako suché

$$\mathcal{S} = \{\, i \mid x'_i \neq y'_i \,\}; \quad \mathrm{E}[|\mathcal{S}|] = r_{\mathrm{a}}.$$

- Druhá zpráva bude vložena metodou psaní na mokrý papír

$$\mathbf{y}'' = \mathrm{Emb}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}'', \mathcal{S}, \mathbf{z}'').$$

- Stegoobjekt $\mathbf{y}$ se vytvoří z nosiče $\mathbf{x}$ změnami $+1$ nebo -1 tak, aby $\mathbf{y}'$ byly nejnižší bity a $\mathbf{y}''$ druhé nejnižší bity stegoobjektu.

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Relativní kapacita a efektivita:

- Efektivita kódu $\mathcal{C}$ je $e = m_1/r_\mathrm{a}$, čili $r_\mathrm{a} = m_1/e$.
- Podle věty o mokrém nosiči je $m_2 \approx |\mathcal{S}|$ a víme, že $|\mathcal{S}| \approx r_\mathrm{a}$.
- Relativní kapacita a efektivita dvouúrovňového ± 1 vkládání je tedy

$$\alpha_{\pm 1} = \frac{m_1 + m_2}{n} \approx \frac{m_1 + m_1/e}{n} = \alpha + \frac{\alpha}{e},$$
$$e_{\pm 1} = \frac{m_1 + m_2}{r_\mathrm{a}} \approx \frac{m_1 + m_1/e}{m_1/e} = e + 1.$$

- Zároveň si můžeme všimnout, že

$$\frac{\alpha}{e} = \frac{\frac{m_1}{n}}{\frac{m_1}{r_\mathrm{a}}} = \frac{r_\mathrm{a}}{n} = \frac{\frac{m_1+m_2}{n}}{\frac{m_1+m_2}{r_\mathrm{a}}} = \frac{\alpha_{\pm 1}}{e_{\pm 1}}.$$

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Tvrzení

Nechť $\mathcal{C}$ je binární kód, jehož efektivita dosahuje horní meze na spodní efektivitu binárních kódů. Potom dvouúrovňovým ± 1 vkládání s kódem $\mathcal{C}$ lze dosáhnout efektivity libovolně blízké horní mezi na spodní efektivitu ternárních kódů, za předpokladu, že kód $\mathcal{C}$ je dostatečně dlouhý.

Dvouúrovňové ± 1 vkládání

Důkaz.

- Připomeňme, že

$$H_q(x) := -x \log_q x - (1-x)\log_q(1-x) + x \log_q(q-1).$$

- Dle předpokladu je $e = \alpha / H_2^{-1}(\alpha)$, čili $\alpha = H_2(\alpha/e)$.
- Dosadíme a upravíme

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm 1} \approx \alpha + \frac{\alpha}{e} &= H_2\left(\frac{\alpha}{e}\right) + \frac{\alpha}{e} \\ &= (\log_2 3) H_3\left(\frac{\alpha}{e}\right) = (\log_2 3) H_3\left(\frac{\alpha_{\pm 1}}{e_{\pm 1}}\right). \end{aligned}$$

- Vyjádříme

$$e_{\pm 1} \approx \frac{\alpha_{\pm 1}}{H_3^{-1}(\alpha_{\pm 1}/\log_2 3)}.$$

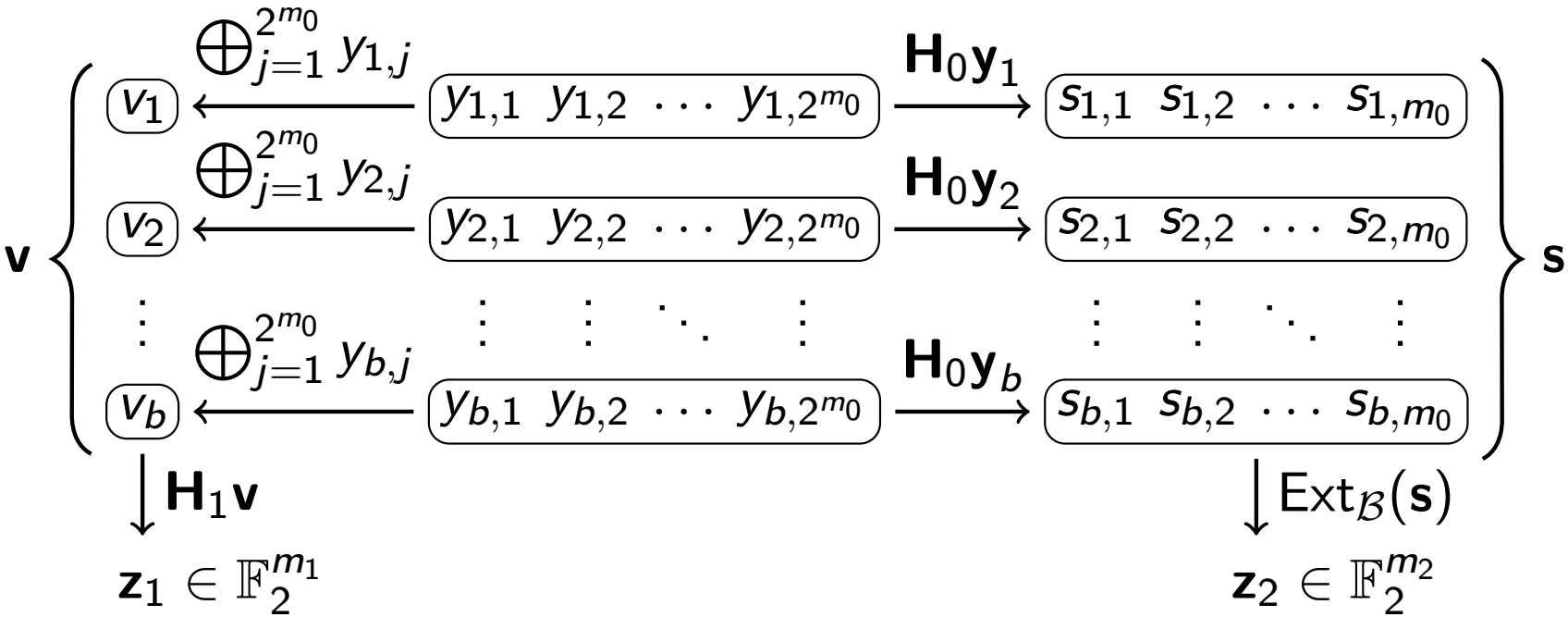
□

Stegosystém ZZW

Značení:

- $\mathbf{H}_0$ vzniká přidáním nulového sloupce k paritní matici Hammingova kódu délky $2^{m_0} - 1$.
- $\mathbf{H}_1$ je paritní matice nějakého $[b, b - m_1]_2$ kódu $\mathcal{C}$ s průměrnou vzdáleností od kódu r_a.
- $\mathcal{B}$ je kódová kniha, která umožňuje vkládat m_2 bitů do nosiče délky bm_0 bitů, z nichž $r_\mathrm{a} m_0$ je suchých.

Extrakce:



Stegosystém ZZW

Zakódování první části zprávy:

- Nosič je rozdělen na b bloků velikosti 2^{m_0}.
- Pro každý blok spočteme $u_i = \bigoplus_{j=1}^{2^{m_0}} x_{i,j}$.
- Zakódujeme první část zprávy $\mathbf{v} = \mathrm{Emb}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{u}, \mathbf{z}_1)$.
- Jestliže $u_i = v_i$, pak $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i$.
- Jestliže $u_i \neq v_i$, pak $\mathbf{y}_i$ získáme tak, že v $\mathbf{x}_i$ provedeme právě jednu změnu. (Volba její pozice v bloku dává prostor k zakódování další zprávy.)
- Očekávaný počet změn je tedy r_{a}.

Stegosystém ZZW

Zakódování druhé části zprávy:

- Syndrom $\mathbf{H}_0\mathbf{x}_i$ lze upravit na libovolnou hodnotu provedením *právě jedné* změny v $\mathbf{x}_i$.
- Pro každý blok spočteme $\mathbf{r}_i = \mathbf{H}_0\mathbf{x}_i$.
- Když $u_i = v_i$, označíme složky vektoru $\mathbf{r}_i$ jako mokré, v opačném případě jako suché.
- Všechna $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_b$ sřetězíme do jediného vektoru $\mathbf{r}$.
- Vektor $\mathbf{r}$ je mokrý nosič s očekávaným počtem suchých prvků $r_\mathrm{a} m_0$.
- Podle věty o mokrém nosiči lze do $\mathbf{r}$ vložit $m_2 \approx r_\mathrm{a} m_0$ bitů informace.

Stegosystém ZZW

Parametry stegosystému:

- Délka nosiče $= b2^{m_0}$.
- Celkový počet bitů zprávy $= m_1 + m_2 \approx m_1 + r_{\mathrm{a}} m_0$.
- Očekávaný počet změn $= r_{\mathrm{a}}$.
- Relativní kapacita a efektivita:

$$\alpha \approx \frac{m_1 + r_{\mathrm{a}} m_0}{b2^{m_0}} \quad \text{a} \quad e \approx \frac{m_1 + r_{\mathrm{a}} m_0}{r_{\mathrm{a}}}.$$

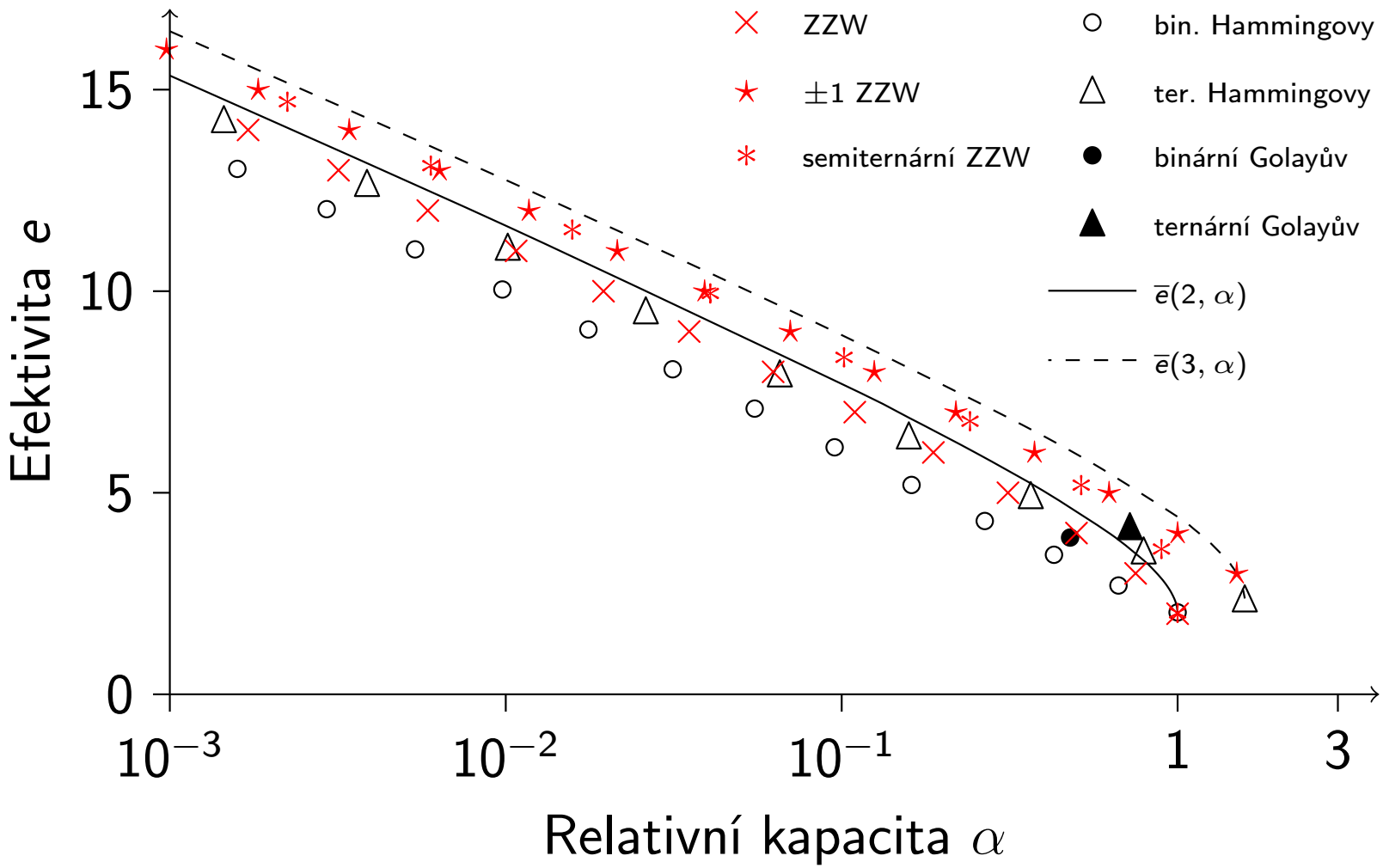
Stegosystém ZZW

Zobecnění a vylepšení:

- Bloky nemusejí mít všechny stejnou délku 2^{m_0}.
- Zpráva $\mathbf{z}_1$ se nemusí kódovat do $\mathbf{u}$ najednou. Lze postupovat po blocích.
- Můžeme použít dvouúrovňové ± 1 vkládání.
- Místo binárních Hammingových kódů lze použít ternární. (Kód $\mathcal{C}$ však zůstává binární.)

Dokonce i pro triviální kód $\mathcal{C}$ (tj. $\mathbf{z}_1 = \mathbf{v}$) dosahuje stegosystém ZZW výborných výsledků.

Triviální ZZW vs. perfektní kódy



Odstup od obou mezí je $< 0{,}6$.