Homomorfismy vektorových prostorů

Úloha 1. Homomorfismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je dán předpisem

$$f\left((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\right) = (x_1 + 2x_3, x_3, 2x_1 + x_2)^T.$$

(a) Spočtěte matici homomorfismu f vzhledem k bázím B a C.

$$B = \left((1,0,2)^{\mathrm{T}}, (-1,0,2)^{\mathrm{T}}, (-2,1,3)^{\mathrm{T}}\right)$$
$$C = \left((2,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,-1)^{\mathrm{T}}\right)$$

Výsledek.

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Rozhodněte, zda f je izomorfismus.

Výsledek. Ano, matice je regulární.

Úloha 2. Homomorfismus $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ má vzhledem k bázím B a C matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B = \left((1,3,1)^{\mathrm{T}}, (3,1,3)^{\mathrm{T}}, (1,1,2)^{\mathrm{T}}\right)$$
$$C = \left((0,2)^{\mathrm{T}}, (2,1)^{\mathrm{T}}\right)$$

(a) Spočtěte matici homomorfismu f vzhledem ke standardním bázím.

Výsledek.

$$[f]_{K_2}^{K_3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Rozhodněte, zda f je epimorfismus.

Výsledek. Ano, sloupce matice generují $\mathbb{Z}_5^2$.

Úloha 3. Homomorfismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem ke standardním bázím matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Spočtěte matici homomorfismu f vzhledem k bázím B a C.

$$B = \left((0,1)^{\mathrm{T}}, (1,2)^{\mathrm{T}}\right)$$
$$C = \left((-1,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,2,1)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}\right)$$

Výsledek.

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Rozhodněte, zda f je monomorfismus.

Výsledek. Ano, sloupce matice jsou lineárně nezávislé.

Úloha 4. Nechť $f : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4$ je homomorfismus, pro který platí

$$\begin{aligned} f\left((0,0,0,1)^{\mathrm{T}}\right) &= (0,1,0,1)^{\mathrm{T}}, \\ f\left((1,0,1,1)^{\mathrm{T}}\right) &= (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ f\left((1,1,1,0)^{\mathrm{T}}\right) &= (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ f\left((0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\right) &= (1,0,1,1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

(a) Spočtěte matici homomorfismu f vzhledem ke standardní bázi.

Výsledek.

$$[f]_{K_4}^{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Rozhodněte, zda f je monomorfismus.

Výsledek. Ne, matice je čtvercová singulární.

(c) Rozhodněte, zda f je epimorfismus.

Výsledek. Ne, matice je čtvercová singulární.

Úloha 5. Nechť f je endomorfismus prostoru $\mathbb{R}^3$, pro který platí

$$\begin{aligned} f\left((1,-2,1)^{\mathrm{T}}\right) &= (-1,0,3)^{\mathrm{T}}, \\ f\left((0,1,0)^{\mathrm{T}}\right) &= (1,1,-3)^{\mathrm{T}}, \\ f\left((1,2,0)^{\mathrm{T}}\right) &= (1,0,-2)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

(a) Ukažte, že f je automorfismus.

(b) Spočtěte matici endomorfismu f^{-1} vzhledem ke standardní bázi.

Výsledek.

$$[f^{-1}]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 6. Najděte nějakou bázi jádra homomorfismu $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ zadaného předpisem $f : p(x) \mapsto xp(2) + p(-1)$.

Řešení. Označme $K_4 = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ a $K_2 = (1, x)$. Potom

$$\begin{aligned} [f]_{K_2}^{K_4} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Ker}\left([f]_{K_2}^{K_4}\right) &= \left\langle (-2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}, (-2,-1,1,0)^{\mathrm{T}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Tento výsledek nám říká, že $\operatorname{Ker} f$ je generováno polynomy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, pro něž platí $[p_1]_{K_4} = (-2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$ a $[p_2]_{K_4} = (-2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. Čili

$$\operatorname{Ker} f = \left\langle x^3 - 3x - 2,\ x^2 - x - 2 \right\rangle.$$

Úloha 7. Označme $B = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ bázi prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a C nějakou bázi prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Matice homomorfismu $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ vzhledem k bázím B a C je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou bázi $\operatorname{Ker} f$.

Řešení. Není podstatné, jak báze C vypadá, protože pro každou bázi C prostoru dimenze 3 platí $[\mathbf{0}]_C = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Nulový prostor zadané matice homomorfismu je generován vektorem $(1,3,-1,2)^{\mathrm{T}}$, čili $\operatorname{Ker} f$ je generováno maticí $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takovou, že $[\boldsymbol{A}]_B = (1,3,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{A} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Ker} f = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Úloha 8. Nechť f je endomorfismus vektorového prostoru konečné dimenze. Dokažte, že f je epimorfismus právě tehdy, když je monomorfismus. Ukažte, že v případě prostoru nekonečné dimenze toto obecně neplatí.

Úloha 9. Nechť $f : U \to V$ je homomorfismus vektorových prostorů a M je nějaká podmnožina prostoru U. Dokažte, že $\langle f(M) \rangle = f(\langle M \rangle)$.

Úloha 10. Matice homomorfismu $f : \langle (4,-7,3)^{\mathrm{T}}, (-2,5,2)^{\mathrm{T}} \rangle \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázím $B = \big((-2,5,2)^{\mathrm{T}}, (0,3,7)^{\mathrm{T}}\big)$ a $C = \big((2,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,0,1)^{\mathrm{T}}, (1,-1,0)^{\mathrm{T}}\big)$ je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou bázi $\operatorname{Im} f$.

Řešení. Není podstatné, jak báze $B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ vypadá. K tomu abychom určili $\operatorname{Im} f$ nám totiž stačí znát množinu obrazů libovolné báze (tato množina generuje $\operatorname{Im} f$).

Sloupce matice homomorfismu jsou $[f(\boldsymbol{u}_1)]_C = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ a $[f(\boldsymbol{u}_2)]_C = (3,1,1)^{\mathrm{T}}$. Z nich určíme generátory $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1) &= 2 \cdot (2,1,1)^{\mathrm{T}} + 0 \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}} + 1 \cdot (1,-1,0)^{\mathrm{T}} = (5,1,2)^{\mathrm{T}}, \\ f(\boldsymbol{u}_2) &= 3 \cdot (2,1,1)^{\mathrm{T}} + 1 \cdot (1,0,1)^{\mathrm{T}} + 1 \cdot (1,-1,0)^{\mathrm{T}} = (8,2,4)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Tyto vektory jsou lineárně nezávislé, takže báze $\operatorname{Im} f$ je $\big((5,1,2)^{\mathrm{T}}, (8,2,4)^{\mathrm{T}}\big)$.

Úloha 11. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ jsou homomorfismy vektorových prostorů takové, že

$$[f]^{K_3}_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad [g \circ f]^{K_3}_{K_2} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou bázi prostoru $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$. Přesvědčte se, že tento prostor je určen jednoznačně.

Úloha 12. Mějme lineární zobrazení $f : U \to V$. Formulujte a dokažte nutnou a postačující podmínku pro to, aby obrazem každé lineárně nezávislé množiny byla opět lineárně nezávislá množina, tj. aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou lineárně nezávislou množinu $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ v U platilo, že $\{f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ je lineárně nezávislá ve V.