

Najděte nějakou bázi průniku vektorových prostorů $U, V \leq \mathbb{Z}_5^4$.

$$U = \left\langle (2, 4, 1, 0)^T, (1, 3, 0, 0)^T, (1, 3, 4, 0)^T, (0, 2, 4, 0)^T \right\rangle$$

$$V = \left\langle (2, 1, 4, 4)^T, (3, 0, 2, 1)^T, (4, 3, 0, 2)^T, (1, 4, 1, 4)^T \right\rangle$$

Řešení. Označme zadané čtveřice vektorů, které generují prostory U a V , jako u_1, u_2, u_3, u_4 a v_1, v_2, v_3, v_4 . Průnik prostorů U a V obsahuje právě ty vektory, které leží v prostoru U a zároveň leží v prostoru V , tj. ty vektory, které lze vyjádřit jako lineární kombinaci u_1, u_2, u_3, u_4 a zároveň jako lineární kombinaci v_1, v_2, v_3, v_4 . Čili $w \in U \cap V$ právě tehdy, když existují $x_1, x_2, \dots, x_8 \in \mathbb{Z}_5$ takové, že

$$w = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4, \quad (1)$$

$$w = x_5 v_1 + x_6 v_2 + x_7 v_3 + x_8 v_4. \quad (2)$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) získáme rovnici (resp. soustavu)

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 - x_5 v_1 - x_6 v_2 - x_7 v_3 - x_8 v_4 = 0.$$

Nejdříve tedy najdeme všechna řešení této homogenní soustavy a z nich potom získáme všechny vektory $w \in U \cap V$, a to tak, že řešení soustavy dosadíme buď do rovnice (1), nebo do rovnice (2). K tomuto stačí, abychom pro každé řešení soustavy znali buď pouze x_1, x_2, x_3, x_4 , nebo pouze x_5, x_6, x_7, x_8 . Sestavíme tedy matici soustavy a převedeme ji do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & -v_1 & -v_2 & -v_3 & -v_4 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \sim \dots \sim & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (3)$$

Nalezneme generátory prostoru řešení soustavy. Vzhledem k tomu, že potřebujeme znát pouze x_5, x_6, x_7, x_8 , stačí určit poslední čtyři souřadnice generátorů prostoru řešení:

$$\begin{aligned} & (_, _, _, 1, \underline{0}, 0, 0, 0)^T, \\ & (_, _, _, 0, \underline{1}, 1, 0, 0)^T, \\ & (_, _, _, 0, \underline{2}, 0, 1, 0)^T, \\ & (_, _, _, 0, \underline{4}, 0, 0, 1)^T. \end{aligned} \quad (4)$$

nepotřebujeme

Odtud získáme vyjádření pro x_5, x_6, x_7, x_8 :

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + 2s + 4t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{kde } r, s, t \in \mathbb{Z}_5.$$

Dosazením x_5, x_6, x_7, x_8 do rovnice (2) získáme vyjádření pro všechna $w \in U \cap V$:

$$w = (r + 2s + 4t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $r, s, t \in \mathbb{Z}_5$. Odtud vidíme, že prostor $U \cap V$ je generován vektory $(0, 1, 1, 0)^T$, $(3, 0, 3, 0)^T$ a $(4, 3, 2, 0)^T$. Zbývá nalézt bázi tohoto prostoru. To lze provést například tak, že generátory průniku zapíšeme do řádků matice a pomocí elementárních úprav ji převedeme do odstupňovaného tvaru.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy zachovávají lineární obal řádků matice a díky odstupňovanému tvaru vidíme, že nenulové řádky výsledné matice jsou lineárně nezávislé. Množina

$$\{(3, 0, 3, 0)^T, (0, 1, 1, 0)^T\}$$

tedy generuje prostor $U \cap V$ a je lineárně nezávislá, čili je to báze $U \cap V$.

Poznámka. Generátory prostoru $U \cap V$ lze spočítat přímo z generátorů prostoru řešení (4), a to tak, že do rovnice (2) postupně dosadíme právě generátory prostoru řešení (resp. jejich poslední čtyři souřadnice):

$$\begin{aligned} 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 &= (0, 0, 0, 0)^T, \\ 1v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 &= (0, 1, 1, 0)^T, \\ 2v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 &= (3, 0, 3, 0)^T, \\ 4v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4 &= (4, 3, 2, 0)^T. \end{aligned}$$