Diagonalizace endomorfismu

Úloha 1. Endomorfismus φ prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (tj. prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2) přiřazuje polynomu $f(x)$ polynom

$$(x^2 - x)f(0) - 2xf'(x) + f(x+1).$$

Najděte bázi C prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici.

Řešení. Nejdříve určíme matici endomorfismu vzhledem k bázi $B = (1, x, x^2)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= (x^2 - x) \cdot 1 - 2x \cdot 0 + 1 = 1 - x + x^2 \\
\varphi(x) &= (x^2 - x) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + x + 1 = 1 - x \\
\varphi(x^2) &= (x^2 - x) \cdot 0 - 2x \cdot 2x + x^2 + 2x + 1 = 1 + 2x - 3x^2
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = [\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [\varphi(1)]_B & [\varphi(x)]_B & [\varphi(x^2)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice je $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = -(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

Spočítáme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním číslům

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} + 3) &= \left\langle (0, -1, 1)^{\mathrm{T}} \right\rangle, \\
\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} + 1) &= \left\langle (2, -5, 1)^{\mathrm{T}} \right\rangle, \\
\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - 1) &= \left\langle (4, -1, 1)^{\mathrm{T}} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že za C můžeme zvolit např. (g_1, g_2, g_3), kde $[g_1]_B = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $[g_2]_B = (2, -5, 1)^{\mathrm{T}}$ a $[g_3]_B = (4, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. Čili $C = (x^2 - x, x^2 - 5x + 2, x^2 - x + 4)$.

Na závěr můžeme ověřit, že matice φ vzhledem k bázi C je skutečně diagonální:

$$\begin{aligned}
\varphi(x^2 - x) &= (x^2 - x) \cdot 0 - 2x(2x - 1) + (x + 1)^2 - (x + 1) = -3(x^2 - x) \\
\varphi(x^2 - 5x + 2) &= (x^2 - x) \cdot 2 - 2x(2x - 5) + (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 2 = -(x^2 - 5x + 2) \\
\varphi(x^2 - x + 4) &= (x^2 - x) \cdot 4 - 2x(2x - 1) + (x + 1)^2 - (x + 1) + 4 = x^2 - x + 4
\end{aligned}$$

$$[\varphi]_C^C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [\varphi(g_1)]_C & [\varphi(g_2)]_C & [\varphi(g_3)]_C \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Endomorfismus $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ přiřazuje polynomu $f(x)$ polynom $f'(x^2+1) - f(2)$. Najděte bázi C prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici.

Výsledek. Matice endomorfismu φ vzhledem k bázi $B = (1, x, x^2)$ je

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Za C lze zvolit např. $(1, x - 1, 3x^2 - 2)$.