

Endomorfismus f prostoru $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ je definován předpisem

$$f : p(x) \mapsto p(x-1) + p'(x) + xp''(x).$$

Najděte bázi B prostoru $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ takovou, že $[f]_B^B$ je v Jordanově kanonickém tvaru.

Řešení. Matice endomorfismu f vzhledem k bázi $K = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice \mathbf{A} je $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1 - \lambda)^5$. Prostor vlastních vektorů matice \mathbf{A} příslušných vlastnímu číslu 1 je $\text{Ker}(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) = \langle (1, 0, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0, 0)^T \rangle$. Jordanova matice je tedy tvořena dvěma buňkami, a to buď řádu 2 a 3 nebo řádu 1 a 4. Vzhledem k tomu, že $\text{rank}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^3) = 1$, je jedna z buněk řádu 4 a nastává tedy druhá varianta.

Nyní zvolíme vhodnou bázi prostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1. Báze musí obsahovat nějaký vektor z

$$\text{Im}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^3) \cap \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \langle (72, 144, 0, 0, 0)^T \rangle \cap \langle (1, 0, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0, 0)^T \rangle.$$

Zvolme tedy $\mathbf{v}_1 = (72, 144, 0, 0, 0)^T$ a druhý vektor stačí zvolit tak, aby společně s \mathbf{v}_1 tvořily bázi $\text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$, např. $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0, 0)^T$. Dopočítáme zobecněné vlastní vektory $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a \mathbf{v}_4 . Za vektor \mathbf{v}_4 zvolíme libovolné řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3 \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 72 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{např. } \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Potom $\mathbf{v}_3 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_4 = (1, -4, 6, 12, 0)^T$ a $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_3 = (-6, 48, 72, 0, 0)^T$.

Tímto jsme získali Jordanovu bázi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{u}\}$ matice \mathbf{A} , kterou už jednoduše převedeme na Jordanovu bázi endomorfismu f

$$B = (144x + 72, 72x^2 + 48x - 6, 12x^3 + 6x^2 - 4x + 1, x^4, 1).$$