Domácí úkol 2

Vždy uvádějte postup nebo zdůvodnění svých odpovědí – samotný výsledek nelze hodnotit plným počtem bodů.

Úloha 1. [2 body]
Určete Jordanův tvar matice $\boldsymbol{A}$ a regulární matici $\boldsymbol{P}$ takovou, že $J(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

$$a)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad b)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. [4 body]
Pro daná dvě celá čísla a, b definujeme *Lucasovu posloupnost* $L(a, b)$ jako posloupnost celých čísel danou rekurentním předpisem

$$\begin{aligned} L_0 &= 0, \\ L_1 &= 1, \\ L_{n+2} &= aL_{n+1} + bL_n. \end{aligned}$$

Všimněte si, že $L(1, 1)$ je Fibonacciho posloupnost. Určete vzorec pro n-tý člen posloupností $L(3, -2)$ a $L(2, -1)$.

Úloha 3. [2 body]
Ve vepříně se šíří prasečí chřipka. V den 0 trpí touto nemocí 20 % čuníků. Každý další den onemocní 5 % vepříků, kteří byli den předtím zdraví, a uzdraví se 45 % těch, kteří byli den předtím nemocní. Virus mutuje natolik rychle, že čuníci se mohou nakazit opakovaně. Kolik procent chrochtíků bude marodit v n-tý den? Na jakém čísle se nemocnost ustálí v nekonečně vzdálené budoucnosti? A co kdyby v den 0 pokašlávalo 50 % prasátek?

Nápověda. Míru nemocnosti ve vepříně v daný den si vyjádřete jako dvousložkový vektor, kde první složka udává aktuální podíl nakažených vepříků a druhá složka udává aktuální podíl zdravých vepříků.

Úloha 4. [2 body]
Označme $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ vektorový prostor reálných polynomů stupně nejvýše 2. Buď $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lineární zobrazení dané předpisem

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

(tj. $D(p(x))$ je derivace polynomu $p(x)$). Najděte nějakou Jordanovu bázi zobrazení D a matici D vůči této bázi.

Úloha 5. [2 body]
Najděte nějakou polární bázi bilineární formy $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}) = 8x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

a určete její signaturu.

Úloha 6. [2 body]
Najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$q((x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}) = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 5x_3^2 + 9x_4^2$$

a určete její signaturu.

Úloha 7. [2 body]
S využitím polární báze rozhodněte, zda je množina

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 16y + 3 = 0\}$$

elipsa nebo hyperbola, a najděte její střed.