Domácí úkol 1

Vždy uvádějte postup nebo zdůvodnění svých odpovědí – samotný výsledek nelze hodnotit plným počtem bodů.

Úloha 1. [3 body]

V prostoru $T^{m\times n}$ (neboli $M_{mn}(T)$) všech matic typu (m,n) nad tělesem T definujeme skalární součin rovností

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}),$$

kde $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ je tzv. *stopa* matice $\boldsymbol{A}$; je-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n, potom definujeme $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

1. Ověřte, že jde o skalární součin.
2. Najděte bázi ortogonálního doplňku podprostoru W v prostoru $\mathbb{R}^{2\times 3}$, kde

$$W = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Úloha 2. [1 bod]

Co můžete říct o vektorech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, jestliže víte, že $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$? Své tvrzení dokažte.

Úloha 3. [4 body]

Mějme prostor reálných polynomů stupně nejvýše 2 se skalárním součinem definovaným $(f \mid g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu ortogonalizujte a normalizujte bázi $\{1, x, x^2\}$.

(b) Pomocí Fourierových koeficientů určete ortogonální projekci polynomu $5x^2 + x - 2$ na podprostor $[1, x]$.

Pro integraci polynomů můžete použít vzoreček

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Úloha 4. [3 body]

Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$, pro které funkce $f(x) = ax + b$ ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje body $(-1,-2)$, $(0,2)$ a $(1,3)$. Jinými slovy, určete koeficienty, které minimalizují hodnotu $\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - y_i)^2$, kde (x_i, y_i), $i \in \{1,2,3\}$ jsou body, které mají být aproximovány. Řešte pomocí věty o aproximaci, nikoliv pomocí derivací! (Pro kontrolu si můžete načrtnout obrázek.)

Úloha 5. [2 body]

Najděte všechna vlastní čísla dané (komplexní) matice. Pro každé z nich určete algebraickou a geometrickou násobnost a nějakou bázi příslušného vlastního podprostoru. Dále rozhodněte, zda je daná matice diagonalizovatelná.

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 6. [2 body]

Mějme matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pro které dvojice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ...

a) má $\boldsymbol{A}$ jediné vlastní číslo?

b) nemá $\boldsymbol{A}$ žádné *reálné* vlastní číslo?

c) je $\boldsymbol{A}$ diagonalizovatelná?

Úloha 7. [2 body]

Buď R_θ rotace $\mathbb{R}^2$ kolem bodu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o úhel θ, $0 \leq \theta < 2\pi$.

a) Najděte matici $\boldsymbol{A}$ lineárního zobrazení R_θ vůči kanonické bázi.

b) Určete vlastní čísla $\boldsymbol{A}$.

c) Pro která θ je $\boldsymbol{A}$ diagonalizovatelná?