pro $\theta = 1 \Rightarrow$ exponenciální rozd.

d) gamma rozdělení

- $X \sim \Gamma(k, \theta)$, když hustota je $f(x) = \frac{1}{\theta^k \cdot \Gamma(k)} x^{k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$

  kde $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} \cdot e^{-t} \, dt$.

- $EX = k \cdot \theta$

  $\operatorname{var} X = k \cdot \theta^2$

- $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X)$, $Y \sim \Gamma(k_Y, \theta_Y)$:

  $X \succeq_{FSD} Y \iff$ 1. $\theta_X \geq \theta_Y$
  2. $k_X \geq k_Y$

  $X \succ_{FSD} Y \iff$ 1. $\theta_X \geq \theta_Y$
  2. $k_X \geq k_Y$ a alespoň jedna z nerovností je ostrá

umožňuje porovnávat investiční příležitosti ve celou a najít dobré / špatné
(ne najít nejlepší řešení ($\Rightarrow$ efficientní řešení))

$\square$

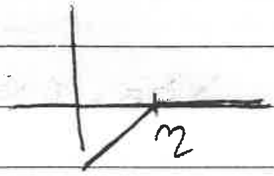
2) Stochastická dominance 2. řádu (SSD)

- Def: $X \succeq_{SSD} Y$, jestliže $Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in U_2$

  $X \succ_{SSD} Y$ ———— $\|$ ———— & $\exists u_0 \in U_2: Eu(X) > Eu$

- Reprezentativní množina:

  $V_2 = \{u_\eta(x) : u_\eta(x) = \min\{x - \eta, 0\}; \eta \in \mathbb{R}\}$



- Věta: $X \succeq_{SSD} Y \iff Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in V_2$

- Nutné a postačující podmínky SSD

  - Def: $F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_X(s) \, ds$

    $F_X^{(-2)}(p) = \int_{-\infty}^{p} F_X^{(-1)}(q) \, dq$; $p \in [0, 1]$

    $= 0$; $p = 0$

    $= \infty$ (tj. nemá smysl); jinak

  - platí: $F_X^{(-2)}$ je duální fcí k $F_X^{(2)}$ ve smyslu Fenchelovy duality

- Věta:

$F_X^{(2)}(t) = E(t-X \mid X \leq t) \cdot P[X \leq t] = E[\max(t-X, 0)]$

→ důkaz:

$$F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx\,dy \overset{\text{Fubiniova věta (prohození } \int)}{=} \int_{-\infty}^{t} \int_{x}^{t} f(x)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{t} (t-x) f(x)\,dx =$$

$$= E(t-X \mid X \leq t) \cdot P[X \leq t]$$

$$= \int_{-\infty}^{t} (t-x) f(x)\,dx + \int_{t}^{\infty} 0 \cdot f(x)\,dx = E\max(t-x, 0) \overset{\text{Def}}{=} LPM_X(t)$$

(lower partial moment prvního řádu) □

- platí: $CVaR_\alpha(-X) = -\dfrac{F_X^{(-2)}(1-\alpha)}{1-\alpha}$ $\quad \left(VaR_\alpha(-X) = F_X^{-1}(\alpha) \right)$

$$CVaR \overset{\text{Def}}{=} \min_z z + \frac{1}{1-\alpha} E[\max(-X-z, 0)]$$

- Věta „Nutné a postačující podmínky SSD"

(i) $X \succeq_{SSD} Y \iff F_X^{(2)}(t) \leq F_Y^{(2)}(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $X \succ_{SSD} Y \iff$ —— || —— $\& \ \exists t_0: F_X^{(2)}(t_0) < F_Y^{(2)}(t_0)$

(iii) $X \succeq_{SSD} Y \iff F_X^{(-2)}(p) \geq F_Y^{(-2)}(p) \ \forall p \in [0,1]$

(iv) $X \succ_{SSD} Y \iff$ —— || —— $\& \ \exists p_0: F_X^{(-2)}(p_0) > F_Y^{(-2)}(p_0)$

(v) $X \succeq_{SSD} Y \iff LPM_X(t) \leq LPM_Y(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$

(vi) $X \succ_{SSD} Y \iff$ —— || —— $\& \ \exists t_0: LPM_X(t_0) < LPM_Y(t_0)$

(vii) $X \succeq_{SSD} Y \iff CVaR_\alpha(-X) \leq CVaR_\alpha(-Y) \ \forall \alpha \in [0,1]$

(viii) $X \succ_{SSD} Y \iff$ —— || —— $\& \ \exists \alpha_0: CVaR_{\alpha_0}(-X) < CVaR_{\alpha_0}(-Y)$

(tedy X je méně rizikové než Y na ∀ hladině α)

($\alpha = 0 \Rightarrow$ střední hodnota, $\alpha = 1 \Rightarrow$ nejhorší ztráta)

3) N-tý řád stochastické dominance (NSD)

· Def: $X \succeq_{NSD} Y$, jestliže $Eu(X) \geq Eu(Y) \ \forall u \in U_N$

$X \succ_{NSD} Y$ —— || —— $\& \ \exists u_0 \in U_N: Eu_0(X) > Eu_0(Y)$

4) ISD: U_∞ completely monotonic utility functions.

· Def: $X \succeq_{ISD} Y$, jestliže $Eu(X) \geq Eu(Y) \ \forall u \in U_\infty$

$X \succ_{ISD} Y$ —— || —— $\& \ \exists u_0 \in U_\infty: Eu_0(X) > Eu_0(Y)$

- čím větší třída generátorů, tím je vlastnost stochastické dominance slabší (čím více užitkových fcí, tím méně jsem schopna najít vzájemně se dominující ~~z~~ prvky)

. nutná a postačující podmínka

- Věta: Nechť X a Y mají nosič v (a,b). Pak $X \succeq_{NSD} Y \iff$ $F_X^{(k)}(b) \le F_Y^{(k)}(b)$ pro $k = 2, 3, \ldots, N-1$ & $F_X^{(N)}(t) \le F_Y^{(N)}(t)$ $\forall t \in (a,b)$

- Věta: $X \succeq_{ISD} Y \iff E(e^{-aX} - e^{-aY}) \le 0 \quad \forall a \ge 0$

  $X \succ_{ISD} Y \iff$ ——— || ——— & $\exists a_0 \ge 0 : E(\ldots) < 0$

- $\boxed{\begin{array}{l} U_N \subset U_{N-1} \\ (N-1)SD \Rightarrow NSD \end{array}}$

- Speciální rozdělení:

a) diskrétní roz. se stejně pravděpodobnými atomy

- $X \ldots x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_T$ s psstí $1/T$

  $Y \ldots y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_T$ — || —

$\Rightarrow X \succeq_{SSD} Y \iff \sum_{i=1}^{t} x_i \ge \sum_{i=1}^{t} y_i \quad \forall t = 1, 2, \ldots, T$, $X \succ_{SSD} Y \iff$ -||- & $\exists$

- ale pro FSD, pro 3. a vyšší řády nic podobného neplatí

b) normální rozdělení

- $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

- $X \succeq_{SSD} Y \iff \mu_X \ge \mu_Y$ & $\sigma_X^2 \le \sigma_Y^2$ Markowitzovo kritérium

  $X \succ_{SSD} Y \iff$ — || — s alespoň 1 ostrou nerovností

- stejně pro NSD, ISD

c) lognormální rozdělení

- $X \sim LN(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim LN(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

- $X \succeq_{SSD} Y \iff EX \ge EY$ & $\frac{\sigma_X}{EX} \le \frac{\sigma_Y}{EY}$

  $X \succ_{SSD} Y \iff$ ——— || ——— s alespoň 1 ostrou nerovností

- stejně pro NSD, ISD

d) gamma rozdělení

- $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X)$, $Y \sim \Gamma(k_Y, \theta_Y)$
- $X \succeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \frac{k_X}{k_Y} \geq \max\left(1, \frac{\theta_Y}{\theta_X}\right)$

  $X \succ_{SSD} Y \Leftrightarrow$ ——— || ——— & ostrá nerovnost pro případ $\frac{\theta_Y}{\theta_X} = 1$
- $X \succeq_{ISD} Y \Leftrightarrow k_1 \geq k_2$ & $\theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2$

  $X \succ_{ISD} Y \Leftrightarrow$ ——— || ——— & 1 nerovnost ostrá

- Aplikace stochastické dominance:

1) optimalizační problémy se SD v omezeních:

$\max f(X)$

za $X \succeq_{SD} Y$

· např. maximalizuji portfolio za podmínky, že můj výnos dominuje index Y

2) testování (teorie) eficience portfolia

· požadujeme ostrou dominanci

s ostrou nerovností

TEORIE CHOVÁNÍ SPOTŘEBITELE

n statků (výrobky + služby)

X ... množina spotřebních vektorů, předp. $X = \mathbb{R}^n_+$

x_i ... množství spotřeby i-tého statku

p_i ... cena statku i, předp. $p_i > 0$

$p_i = 0$ nikdo o něj nemá zájem

$p_i < 0$ elektřina: když hrozí přepětí v síti

I ... důchod (množství peněz k dispozici pro nákup statků, např. měsíční mzda), předp. $I > 0$

Předpoklady:

$<$ je slabé uspořádání

$[x \leq y, x \neq y] \Rightarrow x < y \quad \forall x, y \in X$

$\leq$ po složkách