- množina užitkových fcí

ⓒ Stochastická dominance

- Def 1 (obecná): Mějme X, Y n.v., pak X dominuje Y ($X \succeq_G Y$) vzhledem ke generátoru G, jestliže: $Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in G$ taková, že střední hodnoty existují.
  - slabá = základní dominance

- Def 2 (obecná): —— 11 —— & $\exists u \in G: Eu(X) > Eu(Y)$.
  - silná dominance = striktní : $X \succ_G Y$
  - X již nedominuje X (ve slabé ano) ⇒ ekonomicky má smysl

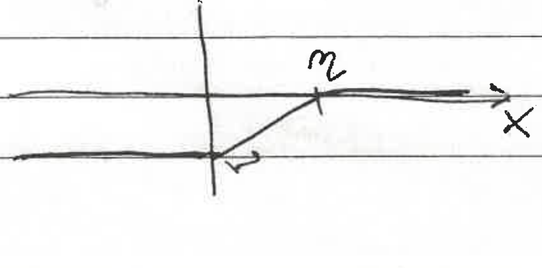
- Typy generátorů: → tj. neklesajících (= NE všech fcí) $f' \geq 0$ First order stoch. dominance
  - U_1 = {množina všech užitkových fcí} ... první řád FSD
  - U_2 = {množina všech konkávních užitkových fcí} ... druhý řád SSD
    - po částech lineární konkávní fce
    - $f' \geq 0$, $f'' \leq 0$
  - $U_N = \{u \in U_1$, dostatečně hladké: $u^{(n)}(x) \cdot (-1)^{n+1} \geq 0\}$ ... $n = 1, 2, \ldots, N$
    - N-tý řád NSD (v praxi 3/4 řád)
  - $U_\infty = \{u \in U_1$, dostatečně hladké: $u^{(n)}(x) \cdot (-1)^{n+1} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots\}$
    - ∞-ný řád ISD infinite order stochastic dominance
  - $U_{CARA} = \{u(x) \sim e^{-ax}, a \geq 0\}$ či U_{HARA} atd. $\subseteq U_\infty$

~~- Def.: Def 1: vzhledem ke stoch. dominanci 1./2. řádu, jestliže $Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u$ / $\forall u$ konkávní) & $\exists$ stri. konkávní~~

1) Stochastická dominance 1. řádu (FSD)

- z Def: $Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in U_1$
- Reprezentativní třída užitkových fcí pro FSD:

$$V_1 = \{u_{\eta,\nu}(x) : u_{\eta,\nu} = \max\{\nu, \min\{x - \eta, 0\}\}, \eta \in \mathbb{R}^*, \nu \in \mathbb{R}^-\}$$



→ netřeba vyšetřovat $\forall$ fce z U_1 (=tj. všechny fce) – stačí vyšetřovat jen pro fce z V_1

$$Eu(X) \geq Eu(Y)\ \forall u \in U_1 \iff Eu(X) \geq Eu(Y)\ \forall u \in V_1$$

- Nutná a postačující podmínka pro FSD:

$$X \succeq_{FSD} Y \iff F_X(x) \leq F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$X \succ_{FSD} Y \iff F_X(x) \leq F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ a } \exists x_0 : F_X(x_0) < F_Y(x_0)$$

- Kvantilová podmínka:

$F_X^{-1}(v) = \min\{u : F_X(u) \geq v\}$ fungují i pro diskrétní roz.

→ Nutná a postačující podmínka:

$$X \succeq_{FSD} Y \iff F_X^{-1}(v) \geq F_Y^{-1}(v)\ \forall v \in [0,1]$$

$$X \succ_{FSD} Y \iff F_X^{-1}(v) \geq F_Y^{-1}(v)\ \forall v \in [0,1] \text{ a } \exists v_0 : F_X^{-1}(v_0) > F_Y^{-1}(v_0)$$

- FSD pro speciální rozdělení: podmíněné roz. – rozmyslet – ?!

a) diskrétní roz. a stejně pravděpodobné atomy
- X nabývá hodnot $x_1, x_2, \dots, x_T$ s pstí $1/T$, $x_1 \leq \dots \leq x_T$
  Y —— " —— $y_1, y_2, \dots, y_T$ —— " —— , $y_1 \leq \dots \leq y_T$
- $X \succeq_{FSD} Y \iff x_i \geq y_i\ \forall i = 1, 2, \dots, T$; $X \succ_{FSD} Y \iff x_i \geq y_i\ \forall i = 1, \dots, T$ & $\exists j : x_j > y_j$

b) $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
- $X \succeq_{FSD} Y \iff$ 1. $\mu_X \geq \mu_Y$ – nutná podmínka dominance
  2. $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ – distr. fce se neprotínají.

$X \succ_{FSD} Y \iff$ 1. $\mu_X > \mu_Y$
  2. $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

c) lognormální rozdělení
- $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X : Z = \ln X$ má ~~log~~normální roz. a hustota: $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x > 0$
- $X \sim LN(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim LN(\mu_Y, \sigma_Y^2)$:

$X \succeq_{FSD} Y \iff$ 1. $\mu_X \geq \mu_Y$
  2. $\sigma_X = \sigma_Y$

$X \succ_{FSD} Y \iff$ 1. $\mu_X > \mu_Y$
  2. $\sigma_X = \sigma_Y$

pro $\vartheta = 1 \Rightarrow$ exponenciální rozd.

d) gamma rozdělení

- $X \sim \Gamma(k, \theta)$, když hustota je $f(x) = \dfrac{1}{\theta^k \cdot \Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$
  kde $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} \cdot e^{-t}\, dt$.
  $EX = k \cdot \theta$
  $\operatorname{var} X = k \cdot \theta^2$
- $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X)$, $Y \sim \Gamma(k_Y, \theta_Y)$:
  $X \succeq_{FSD} Y \iff$ 1. $\theta_X \geq \theta_Y$
  2. $k_X \geq k_Y$

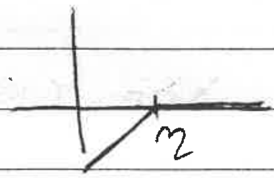
  $X \succ_{FSD} Y \iff$ 1. $\theta_X \geq \theta_Y$ a alespoň jedna z
  2. $k_X \geq k_Y$ nerovností je ostrá

(umožňuje porovnávat investiční příležitosti, ale celkově a najít dobré / špatné
ne najít nejlepší řešení ($\Rightarrow$ ~ efektivní řešení))

$\square$

2) Stochastická dominance 2. řádu (SSD)

- **Def:** $X \succeq_{SSD} Y$, jestliže $Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in U_2$
  $X \succ_{SSD} Y$ ——— || ——— & $\exists u_0 \in U_2 : Eu(X) > Eu$
- Reprezentativní množina:
  $V_2 = \{u_\eta(x) : u_\eta(x) = \min\{x - \eta, 0\}; \eta \in \mathbb{R}\}$



- **Věta:** $X \succeq_{SSD} Y \iff Eu(X) \geq Eu(Y)$ $\forall u \in V_2$

- Nutné a postačující podmínky SSD
  - **Def:** $F_X^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{t} F_X(s)\, ds$
    $F_X^{(-2)}(p) = \int_{-\infty}^{p} F_X^{(-1)}(q)\, dq$; $p \in [0, 1]$
    $= 0$; $p = 0$
    $= \infty$ (tj. nemá smysl); jinak

- platí: $F_X^{(-2)}$ je duální fcí k $F_X^{(2)}$ ve smyslu Fenchelovy duality