Viz Majerová, L. (2012). Identifikace vlastností už. fcí. KPMS MFF UK

NMEK 531 Matematická ekonomie

hodnota majetku

Riziková prémie: $u(W + \mathbb{E}w - \pi) = \mathbb{E}u(W + w)$

už. fce investora

riziková prémie, tj. částka, při níž bude investor lhostejný mezi možností hrát hru a získat $\mathbb{E}w - \pi$

$\pi := \pi(W, F_w)$

$P[w \le x]$

von Neumann: jsou-li splněny (*), pak $\exists$ už. funkce $u: (X, \succeq) \to \mathbb{R}$

(*) úplnost, tranzitivita, spojitost, nezávislost

Pojistná prémie: $\pi_I(W, F_w) = \pi(W, F_w) - \mathbb{E}w$

Spravedlivá hra: $\mathbb{E}w = 0$ $\xRightarrow{\text{dle Taylora } \mathbb{E}u(W+w)}$ $\pi \approx -\frac{1}{2}\sigma_w^2 \frac{u''(W)}{u'(W)} = \frac{1}{2}\sigma_w^2 r(W)$

+ 2x dif.
+ 3. abs. centr. moment je menší řádu σ_w^2

$$\boxed{r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}}$$

afinní fce lineární

míra abs. rizikové averze Arrow-Pratt (ARA) (u rost. a 2x dif.)

! **Platí:**
- $r(W) > 0$, $\pi > 0$ pro rizikově averzní inv.
- $r(W) = 0$, $\pi = 0$ pro rizik.-neutr. inv.
- $r(W) < 0$, $\pi < 0$ pro investora afinního k riziku

resp. hra $\mathbb{E}w = \mu$: $\pi \approx -\frac{1}{2}\sigma_w^2 \frac{u''(W+\mu)}{u'(W+\mu)}$

[RRA (rel.): $r_R(W) = W \cdot r(W)$] + [u_1, u_2, r_1, r_2 ARA $r_1(W) > r_2(W)$ … u_1 je více averzní než u_2 lokálně]

Příklad 1:

Uvažujte už. fci $u(W) = \log(W/10)$ a počáteční majetek 100€. Jaká je přesná a přibližná hodnota rizikové prémie pro hru w:

(a) $w =$ 1, $p = 0.5$; −1, $p = 0.5$

(b) $w =$ 2 s pstí 1/3; 0 –"–; −2 –"–

(c) $w =$ 10 s pstí 0.5; −10 –"–

(d) $w =$ 50 s pstí 1/4; 0 s pstí 1/2; −50 s pstí 1/4

(e) $w =$ 50 s pstí 0.5; −99 s pstí 0.5

(1a) $E w = 1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{2} = 0$, $\sigma_w^2 = E w^2 = 1$

(P) $\log\left(\frac{100+0-\pi}{10}\right) = \mathbb{E}\log\left(\frac{100+w}{10}\right)$

$\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{101}{10}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{99}{10}\right) \Rightarrow \pi = 10\left(10-\frac{\sqrt{101\cdot 99}}{10}\right)\approx 5\cdot 10^{-3}$

(A) $r(W) = -\frac{-\frac{1}{W^2}}{\frac{1}{W}} = \frac{1}{W} \Rightarrow \pi^* = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{200} = 0{,}005$

(1b) $E w = 2\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+(-2)\cdot\frac{1}{3} = 0$, $\sigma_w^2 = E w^2 = (2)^2\frac{1}{3}+0^2\frac{1}{3}+(-2)^2\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

(P) $\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{102}{10}\right)+\frac{1}{3}\log\left(\frac{100}{10}\right)+\frac{1}{3}\log\left(\frac{98}{10}\right)$

$10-\frac{\pi}{10} = \sqrt[3]{\frac{102\cdot 100\cdot 98}{10^3}} \Rightarrow \pi = 10\cdot\left[10-\frac{\sqrt[3]{102\cdot 100\cdot 98}}{10}\right]\approx 0{,}013335$

(A) $\pi^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{75} \approx 0{,}013333\ldots$

(1c) $\mathbb{E}w = 0$, $\sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = 100\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2} = 50+50 = 100$

(P) $\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{110}{10}+\frac{1}{2}\log\frac{90}{10}$

$\Rightarrow \pi = 10\cdot\left[10-\frac{\sqrt{110\cdot 90}}{10}\right]\approx 0{,}50126$

(A) $\pi^* = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{2}$

(1d) $\mathbb{E}w = 0$, $\sigma_w^2 = \mathbb{E}w^2 = \frac{50^2}{4}\cdot 2 = 1250$

$\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{4}\log 15+\frac{1}{4}\log 10+\frac{1}{4}\log 5$

$\pi = 10\cdot\left[10-\sqrt[4]{15\cdot 100\cdot 5}\right]\approx 6{,}939$

$\pi^* = \frac{1}{2}\cdot 1250\cdot\frac{1}{100}\approx 6{,}25$

(1e) $\mathbb{E}w = \frac{-99+50}{2} = \frac{-49}{2}$ $\mathbb{E}w^2 = \frac{(99)^2}{2}+\frac{(50)^2}{2} = \frac{12301}{2}$

$\sigma_w^2 = \frac{12301}{2}-\left(\frac{49}{2}\right)^2 = \frac{22201}{4}$

$\log\left(10-\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\log 15 \Rightarrow$

$-\frac{49}{2}/10$

$\pi = 75{,}5-\sqrt{150} = 63{,}25205$

$\pi^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{22201}{4}\cdot\frac{1}{100-\frac{49}{2}} = 36{,}75$

~ Příklad 2: Spočtěte ARA míru a diskutujte vztah inv. k riziku (dle W a p.):

a, $u(W)=\frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}}+d$, $a\neq 0$, $a\neq 1$, $aW+b>0$, $c\geq 0$, $d\in R$

b, $u(W)=e^{-aW}+e^{-bW}$, $a>0$, $b>0$

c, $u(W)=(W-a)^3$ d, $u(W)=1-e^{-aW}$

(2a) $u'(W)=\frac{c}{a-1}\cdot\left[\frac{a-1}{a}\right]\cdot(aW+b)^{-1/a}\cdot a= c\cdot(aW+b)^{-1/a}$

$u''(W)= c\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot a\cdot(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}=-c\cdot(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}$

$r(W)=-\frac{-c(aW+b)^{-\frac{a+1}{a}}}{c(aW+b)^{-1/a}}=\frac{1}{aW+b}=(aW+b)^{-1}$ → HARA hyp. ab. riz. inv.

$aW+b>0 \Rightarrow r(W)>0$, tj. rizikově averzní

(2b) $u'(W)=-a\cdot e^{-aW}-b\,e^{-bW}$

$u''(W)=(-a)^2e^{-aW}+(-b)^2\cdot e^{-bW}=a^2e^{-aW}+b^2e^{-bW}$

$r(W)=-\frac{a^2e^{-aW}+b^2e^{-bW}}{-(ae^{-aW}+be^{-bW})}=\frac{a^2e^{-aW}+b^2e^{-bW}}{ae^{-aW}+be^{-bW}}$

$a,b>0 \Rightarrow r(W)>0$, tj. rizikově averzní investor

(2c) $u'(W)=3\cdot(W-a)^2$, $u''(W)=6(W-a)$ $\Big\}$ $r(W)=-\frac{6\cdot(W-a)}{3\cdot(W-a)^2}=-2/(W-a)$

$W>a \Rightarrow r(W)<0$, tj. rizikově vyhledávací investor

$W<a \Rightarrow r(W)>0$, tj. rizikově averzní investor

(2d) $u'(W)=-e^{-aW}(-a)$ $u''(W)=-(-a)^2e^{-aW}$ $\Rightarrow r(W)=a \Rightarrow$ 0 riz. neutr. / $a>0$ riz. averzní / $a<0$ r. afin.

~ Příklad 3: Zjistěte jakou (přibližně) užitkovou fci má investor, víte-li

(i) $r(W)$ je hyperbolická, kladná a klesající,

(ii) pro hru $w = \begin{cases} 3, & \text{s pstí } 0.5 \\ -1, & \text{s pstí } 1/2 \end{cases}$ má rizikovou prémii

$$\pi = \frac{1}{2} \quad \text{pro } W = 10$$

$$\pi = \frac{1}{4} \quad \text{pro } W = 20$$

(3) $\mathbb{E} w = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$, $\mathbb{E} w^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$, $\underline{\underline{\sigma_w^2 = 4}}$ [hra není spravedlivá]

r(i) $r(W) = \dfrac{1}{aW+b}$, $aW+b>0$, $a \neq 0$

pro $a \neq 0$: $r(W) = -\dfrac{u''(W)}{u'(W)} = -\dfrac{d}{dW} \log u'(W) = \dfrac{1}{aW+b}$ / řešit.

$$\Rightarrow \log u'(W) = -\frac{1}{a} \log(aW+b) + C$$

$$u'(W) = \tilde{C} \cdot (aW+b)^{-1/a}$$

$$\int u'(W)\,dW = \int \tilde{C} (aW+b)^{-1/a}\,dW$$

$\underline{\underline{(i)}}$ $u(W) = \dfrac{c}{a-1} (aW+b)^{\frac{a-1}{a}} + d$, $a \neq 1$, $a \neq 0$, $aW+b>0$, $c \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$

$\underline{\underline{(ii)}}$ $u(W) = c \cdot \log(W+b) + d$, $W+b>0$, $c \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$

~ Kalibrace $\quad \pi = \frac{1}{2} \sigma_w^2 \cdot r(W+\mu)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{a(10+1)+b} \quad \text{a} \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{a(20+1)+b}$$

$$11a + b = 4 \qquad\qquad 21a + b = 8$$

$$10a = 4 \Rightarrow a = 4/10, \quad b = 4 - \frac{44}{10} = \underline{\underline{-\frac{4}{10}}}$$

Příklad 4: Porovnejte skutečné rizikové prémie s Arrow. aprox. (předchozí př.):

$$u(W) = \frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}} + d, \quad a \neq 1, a \neq 0, aW+b>0, c \geq 0, d \in R$$

pro $W=10$: $a = 4/10$, $b = -4/10$: $u(W) =$

$$u(10+1-\pi) = \mathbb{E}\, u(10+w)$$

$$\frac{c}{a-1}\left[a\cdot(11-\pi)+b\right]^{\frac{a-1}{a}} + d = \left(\frac{c}{a-1}\left[a\cdot(10+3)+b\right]^{\frac{a-1}{a}} + d\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a-1}\left[a\cdot 9+b\right]^{\frac{a-1}{a}}\right)$$

$$\frac{c}{a-1}\left[a\cdot(11-\pi)+b\right]^{\frac{a-1}{a}} = \frac{c}{a-1}\left[(13a+b)^{\frac{a-1}{a}} + (9a+b)^{\frac{a-1}{a}}\right]$$

$$\left[a\cdot(11-\pi)+b\right]^{\frac{a-1}{a}} = \frac{1}{2}(13a+b)^{\frac{a-1}{a}} + \frac{1}{2}(9a+b)^{\frac{a-1}{a}}$$

$$\left[\frac{4}{10}\cdot(11-\pi)-\frac{4}{10}\right]^{-3/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{13\cdot 4}{10}-\frac{4}{10}\right)^{-3/2} + \frac{1}{2}\left(9\cdot\frac{4}{10}-\frac{4}{10}\right)^{-3/2}$$

$$\left[\frac{44}{10}-\frac{4}{10}\pi-\frac{4}{10}\right]^{-3/2} = \frac{1}{2}(4{,}8)^{-3/2} + \frac{1}{2}(3{,}2)^{-3/2}$$

$$\left[-4/10\cdot\pi + 4\right]^{-3/2} = \frac{1}{2}(4{,}8)^{-3/2} + \frac{1}{2}(3{,}2)^{-3/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi = 0.495053$$

pro $W=20$:

$$\frac{c}{a-1}\cdot\left[21\cdot\frac{4}{10}-\frac{4}{10}\pi-\frac{4}{10}\right]^{-3/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a-1}\left\{\left[\frac{23\cdot 4}{10}-\frac{4}{10}\right]^{-3/2} + \left[19\cdot\frac{4}{10}-\frac{4}{10}\right]^{-3/2}\right\}$$

$$\left[-4/10\cdot\pi + 8\right]^{-3/2} = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{88}{10}\right]^{-3/2} + \left[\frac{72}{10}\right]^{-3/2}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi = 0.249377$$

~ Příklad 5: Investor s užitkovou funkcí $u(W) = -e^{-W/100}$ zvažuje investici (i) do bezrizikového aktiva s v. 2%, (ii) do rizikového aktiva, jehož výnos v % p.a. se řídí $N(3,\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Spočtěte opt. rozložení investice 100€.

$$\max E_\rho u(W_0 + \rho^T x)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 100,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$r \geq 0$

~~5%~~ 3/5 prob.

0%, 2/5 prob.

~ Příklad 6: analogie s $u(W) = \log(W/50)$, rizikové aktivum

$$E_\rho u(W_0 + \rho^T x) = \frac{3}{5}\log\left(2 + \frac{0{,}02x_1 + 0{,}01x_2 r}{50}\right) + \frac{2}{5}\log\left(2 + \frac{0{,}02x_1}{50}\right)$$

$$\to \max \quad \text{s.t. } x_1 + x_2 = 100,\ x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1^* = \frac{2960r - 10000}{2-r}, \quad x_2^* = \frac{-3060r + 10200}{2-r}, \quad r \neq 2$$

+ diskuze $x_1^* \in [0, 100]$: $x_2^* = 1 - x_1^*$

[$r = 2 \Rightarrow x_1^* = 100,\ x_2^* = 0$]