"vhodný def. obor pro funkce v úloze"

Def. (GPO): Nechť $x^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in \mathbb{R}_+^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$ a $\tilde{M} \supset M$. Trojice (x^*, u^*, v^*) splňuje GPO pro úlohu NLP v oboru $(\tilde{M} \cap \hat{M}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$, jestliže je sedlovým bodem L.f.

$x^* \in \tilde{M} \cap \hat{M}$, $u^* \in \mathbb{R}_+^{I_1}$, $v^* \in \mathbb{R}^{J_1}$,

a $\forall\, x \in \tilde{M} \cap \hat{M}$, $u \in \mathbb{R}_+^{I_1}$, $v \in \mathbb{R}^{J_1}$ platí

$$L(x, u^*, v^*) \geq L(x^*, u^*, v^*) \geq L(x^*, u, v)$$

$\hat{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0;\ j \in I_2,\ h_\ell(x) = 0,\ \ell \in J_2\}$ "nelehké omezení"

$L(x,u,v)$: $f(x) + \sum_{j \in I_1} u_j \cdot g_j(x) + \sum_{\ell \in J_1} v_\ell h_\ell(x)$, $(\tilde{M} \cap \hat{M}) \times \mathbb{R}_+^{I_1} \times \mathbb{R}^{J_1}$

většinou se nelehké omezení dají I_1, J_1

Příklad 1: Ověřte, že v úloze $\min \sum_{i=1}^n c_i x_i$, s.t. $\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \leq r$, $x_i \in \mathbb{R}$,
[$c_i \neq 0$, a_i; $r > 0$ dáno]

splňuje bod $\Big(\underbrace{a_1 - \frac{c_1\sqrt{r}}{\sqrt{\sum_i c_i^2}}, \dots, a_n - \frac{c_n\sqrt{r}}{\sqrt{\sum_i c_i^2}}}_{x^*};\ \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\sum c_i^2}}_{u^*}\Big)$ GPO.

Řešení: $L(x,u) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + u \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 - r\right]$

(1) $L(x, u^*) \overset{?}{\geq} L(x^*, u^*)$, $\forall x \in M$

$$L(x, u^*) = \sum_i c_i x_i + \frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\sum c_i^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 - r\right]$$

$$L(x^*, u^*) = \sum_i c_i\left(a_i - \frac{c_i\sqrt{r}}{\sqrt{\sum c_i^2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\sum c_i^2}\, \underbrace{\left[\sum\left(-\frac{c_i\sqrt{r}}{\sqrt{\sum c_i^2}}\right)^2 - r\right]}_{0} =$$
$$= \sum_i c_i a_i - \sqrt{r}\sqrt{\sum c_i^2}$$

$\parallel$

$$L(x^*, u) = \sum c_i a_i - \sqrt{r}\sqrt{\sum c_i^2} + u \cdot [0] = \sum c_i a_i - \sqrt{r}\sqrt{c_i^2}$$

$L(\cdot, \ )$ je konvexní [pro nez.] $\quad L(\ , \cdot)$ je lineární, $L(*, u) = L(x, u) + (u - u^*)^T D_x$

$$L(x, *) \geq L(x^*, *) + (x - x^*)^T D_x L(x^*, *) \geq$$
$$\geq L(x^*, *) + x^T D_x L(x^*, *)$$

~ Příklad 2: Úloha kv. programování

$$\min\ p^T x + \frac{1}{2} x^T C x \quad \ldots \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j$$

$$\text{s.t.}\ A x \le b, \quad \ldots \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \ldots m,$$

$$x \ge 0, \quad -x_k \le 0,\ k = 1, \ldots n$$

$x \in R$.

kde C je pozitivně semidef. matice

! C symetrická

(1.) ověřit, že jde o úlohu konvexního programování

(2.)

$$L(x, u) = \sum p_i x_i + \frac{1}{2} \sum\sum x_i c_{ij} x_j + u_1 [\sum a_{1j} x_j - b_1] + \ldots + u_m [\sum a_{mj} x_j - b_j] - \tilde{u}_1 x_1 - \ldots - \tilde{u}_n x_n$$

LPO: (i) $\nabla_u L = (\sum a_{1j} x_j - b_1, \ldots, -x_n) \overset{!}{\le} 0 \implies A x^* \le b,\ x^* \ge 0$

(ii) $u \ge 0$ a $u_1 (\sum a_{1j} x_j - b_1) +$ $\implies u^* \ge 0$ a $u^{*T}(A x^* - b) = 0$

$\vdots$

$u_m (\sum a_{mj} x_j - b_m) +$

$+ \tilde{u}_1 \cdot x_1$

$\vdots$

$+ \tilde{u}_n \cdot x_n = 0 \implies \tilde{u}^* \ge 0$ a $(\tilde{u}^*)^T \cdot x = 0$

(iii) $\nabla_x L = (p_1 + \sum_j c_{1j} x_j + u_1 a_{11} + \ldots + u_m a_{m1} - \tilde{u}_1, \ldots) \overset{!}{=} 0$

$$\nabla_x L = p + Cx + A^T u - \tilde{u} \overset{!}{=} 0 \quad \ldots \quad Cx = -p - A^T u - \tilde{u}$$

(Např.) regresní problém: $\min (y - X\beta)^T (y - X\beta)$, s.t. β lineární omez.: $A\beta = a,\ B\beta \le b$

s omezením OLS

data data

(Např.) Markowitz: $\max (E S)^T x$ ← relativní podíl portfolia, a $\min x^T \mathrm{var}(S) x$, $x \in M$ ← množina příp. omezení

↑ m.v. výnosů sm..k   ← měřítko rizik

$$\min \{ x^T \mathrm{var}(S) x : E(S)^T x \ge \mu;\ \sum x_i = 1,\ x \in M \}$$

~ Příklad 3: uvažujme úlohu LP: $\min c^T x$ s.t. $Ax = b$, $x \geq 0$

$L = c^T x + u^T x + v^T (Ax - b)$ KONVEXNÍ ÚLOHA NLP

LPO: (i) $Ax = b$, $x \geq 0$

(ii) $u \geq 0$, $u^T x = 0$

(iii) $c + A^T v - u = 0$

ze (iii) $u = c + A^T v \overset{!}{\geq} 0$ (dle (ii))

dále dle (ii) $0 = (c^T + v^T A) \cdot x = c^T x + v^T \underbrace{Ax}_{b} = c^T x + v^T b = c^T x + b^T v$

Položme $y = -v$, LPO půjdou na tvar

(i) $Ax = b$, $x \geq 0$

(ii) $b^T y = c^T x$ "zdánlivé odmocné duality"

(iii) $A^T y \leq c$

~ Příklad 4:

$$\min \; x_1^2+x_2^2$$
$$\text{s.t.} \; x_1+x_2=4$$
$$x_1\geq 0,\; x_2\geq 3$$

$$L(\,) = x_1^2+x_2^2+u_1(-x_1)+u_2(-x_2+3)+v_1\cdot(x_1+x_2-4)$$

LPO: (i) $\nabla_u L=(-x_1,-x_2+3)\leq 0$, $\nabla_v L=(x_1+x_2-4)=0$

(ii) $u\geq 0$, $u^T\cdot(-x_1,-x_2+3)^T=0$: $-u_1x_1 + u_2(-x_2+3)=0$ } 4 případy:
- $u_1, u_2=0$
- $u_1\neq 0, u_2=0$
- $u_1=0, u_2\neq 0$
- $u_1\neq 0, u_2\neq 0$

(iii) $\nabla_x L=(2x_1-u_1+v_1,\; 2x_2-u_2+v_1)=0$

$$x_1=\frac{u_1-v_1}{2},\quad x_2=\frac{u_2-v_1}{2}$$

(1) $u_1=0, u_2=0$: $x_1=-\frac{v_1}{2}$, $x_2=-\frac{v_1}{2}$ a $-\frac{v_1}{2}-\frac{v_1}{2}-4=0$ $\quad v_1=-4$

$x_1=2$, $x_2=2$! porušuje (i) X

(2) $u_1\neq 0, u_2\neq 0$: ze (ii) $\Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$, což porušuje $\nabla_v L=0$ X

(3) $u_1\neq 0, u_2=0$: ze (ii): $x_1=0$ ↓ z (i) $x_2=4$ } $\Rightarrow v_1=-8$, $u_2=0$, $u_1=-8$ X

↑ $u_1\geq 0$

(4) $u_1=0, u_2\neq 0$: $x_2=3$ ↳ z (i): $x_1=1$ } $\Rightarrow v_1=-2$, $u_1=0$, $u_2=4$

$\Rightarrow$ splňuje LPO :)

+ úloha k. progr. :)

~ Příklad 5: Z teorie chování spotřebitele

$u(x,y) = \sqrt{xy+1}$

$\max\ u(x)$ ← ordinální už. fce, spojitá a konkávní

s.t. $x \in M(p, I)$

uzavřená, konvexní množina

$M(p, I) = \{x \mid x \geq 0 : p^T x \leq I\}$ množství, income, cena i-té komodity

$$\left(\begin{array}{l} \max\ u(x) \\ \text{s.t. } p^T x = I \\ \qquad x \geq 0 \end{array} \right)$$

$L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(p^T x - I)$. $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p^T x = 0 \Rightarrow \hat{x}_i = \varphi_i(p, I)$

nejlepší pred. $\varphi(p,I) \geq 0$

~ Příklad 6: f, g konvexní funkce $A : R$, $\lambda > 0$: (i) $f+g$ je konvexní

(ii) λf je konvexní