1. Konvexnost množin

Def.: Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní: $\forall x, y \in A$ a $\forall \lambda \in (0,1)$: $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

Příklad 1: Nechť A, B jsou dvě konvexní množiny $\subseteq \mathbb{R}^n$, pak (i) $A \cap B$ je konvexní!?
Dokažte, či uveďte protipříklad. (ii) $A \cup B$ je konvexní!?
(iii) $A \setminus B$ je konvexní!?

2. Konvexnost funkcí

Def. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní. Funkci $f: A \to \mathbb{R}^1$ nazveme konvexní,
$\forall x, y \in A$ a $\forall \lambda \in (0,1)$: $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Funkce f je konkávní, je-li $-f$ konvexní.

Lemma: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f: A \to \mathbb{R}^1$ má spojité druhé parciální derivace v každém bodě A. Pak f je konvexní $\Leftrightarrow$ je Hessian $[\nabla^2_{x,x} f(x)]$ pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in A$.

Lemma: Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně semidefinitní $\Leftrightarrow$

(i) všechna vlastní čísla jsou ≥ 0,

(ii) determinanty všech hlavních podmatic A jsou nezáporné, tj.

$$\det(A_{i,j};\ i,j \in I) \geq 0, \quad \forall I \subset \{1, 2, \dots n\}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $I \subset \{1 \dots n\}$, $I \neq \emptyset$ $\det(A_{I,I}) \geq 0$

Příklad 2: $f(x) = \log(e^{x_1} + e^{x_2})$, $x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla^2_{x,x} f(x) = \underbrace{\frac{e^{x_1+x_2}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2}}_{>0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{konvexní na } \mathbb{R}^2$$

Příklad 3: $f(x) = \frac{x^2}{y}$, $x = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(*,0)\}$

$$\nabla^2_{xx} f(x) = 2/y \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x/y \\ -x/y & x^2/y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{konvexní na } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

Příklad 4: Nechť $A \subseteq R^n$ je konvexní, $f: A \to R$ konvexní fce a $\alpha \in R$. Pak $\{x \in A : f(x) \le \alpha\}$ a $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$ jsou konvexní! Dokažte.

[Je-li f navíc lineární, pak $\{x \in A : f(x) = \alpha\}$ je konvexní]

Úloha NLP:

$$\min / \max \ f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \le 0, \ i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, \ j = 1, \dots, p, \ x \in R^n.$$

* f, g, h lineární $\Rightarrow$ LP
* min: f je konvexní, g konv. a h lineární $\Rightarrow$ konvexní p.
  max: f je konkávní
  $\Rightarrow M$ je konvexní $\bigcap \{x : g_i(x) \le 0\} \cap \bigcap \{x : h_j(x) = 0\}$
* f kvadratická, min, g, h jsou lin. $\Rightarrow$ kvadratické p.

Lokální podmínky optimality

Nechť $\tilde{M} \supseteq M$ otevřená množina, reálné funkce f, g_i, h_j mají konečné parciální derivace na $\tilde{M}$. Trojice $(x^*, u^*, v^*) \in \tilde{M} \times R^m_+ \times R^p$ splňuje LPO, je-li

(i) přípustnost: $\nabla_u L(x^*, u^*, v^*) \le 0$, $\nabla_v L(x^*, u^*, v^*) = 0$

(ii) komplementarita: $u^* \ge 0$, $(u^*)^T \nabla_u L(x^*, u^*, v^*) = 0$

(iii) optimalita: $\nabla_x L(x^*, u^*, v^*) = 0$

kde $L(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$ na $\tilde{M} \times R^m_+ \times R^p$

Příklad 5: Nalezněme poloměr r a výšku válce h tak, aby měla objem aspoň V, a to při minimální ploše.

$$\min\ 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot h \leftarrow \text{není konvexní}$$

$$\text{s.t. } \underbrace{\pi r^2 h \geq V}_{\text{fce není konvexní / není konkávní}},\ r>0,\ h>0. \quad \Rightarrow \text{není úloha konv. prg.}$$

transformace $r = e^{x_1}$, $h = e^{x_2}$

$$\min\ 2\pi\left(e^{2x_1} + e^{x_1}\cdot e^{x_2}\right)$$

$$\text{s.t. } \pi\cdot e^{2x_1}\cdot e^{x_2} \geq V,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{úloha k.p.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln\frac{V}{\pi} - 2x_1 - x_2 \leq 0$$

LPO: ??? $L(x_1,x_2;u) = 2\pi e^{2x_1} + 2\pi e^{x_1}e^{x_2} + u\left(C - 2x_1 - x_2\right)$

(1) $\nabla_u L \leq 0 \Rightarrow C - 2x_1 - x_2 \leq 0$

(2) $u \geq 0$ a $u\cdot(C - 2x_1 - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow u = 0 \vee 2x_1 + x_2 = C$

(3) $\nabla_x L = \left(\underbrace{4\pi e^{2x_1} + 2\pi e^{x_1}e^{x_2} - 2u}_{(1)},\ \underbrace{2\pi e^{x_1}e^{x_2} - u}_{(2)}\right) = 0$

ze (2): $2\pi e^{x_1}e^{x_2} = u > 0$

ze (1) [dle (2)]: $2e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 + \ln 2 = x_2\}$

(2)+(3) $\quad x_1 = \dfrac{\ln\frac{V}{2\pi}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\ln\frac{4V}{\pi}}{3}$

$$\Updownarrow$$

$$r = e^{x_1} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3},\quad h = e^{x_2} = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$(x_1^*, x_2^*, u^*) = \left(\frac{\ln\frac{V}{2\pi}}{3}, \frac{\ln\frac{4V}{\pi}}{3}, 2\pi\cdot\left(\frac{4V^2}{2\pi^2}\right)^{1/3}\right)$$

~Příklad 6: $\min c^T x$ ← lineární ⇒ konvexní

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \le r,\ x_i \in \mathbb{R}$$ ⇐ konvexní ⇒ konvexní.

$$(x-a)^T(x-a) \le r,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$0 \ne c \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ dány ⇒ úloha k. pg.

$$L(x,u) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + u \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 - r\right]$$

LPO: ① $\nabla_u L = \sum_i (x_i - a_i)^2 - r \le 0$

② $u \ge 0,\ u \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 - r\right] = 0 \iff u = 0 \lor \sum (x_i - a_i)^2 = r$

③ $\nabla_x L = \left(c_1 + 2u \cdot (x_1 - a_1), \dots, c_n + 2u(x_n - a_n)\right) \overset{!}{=} 0$

③ a ② $u = 0 \Rightarrow \nabla_x L = c \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sum_i (x_i - a_i)^2 = r$

$u > 0 \Leftarrow$; $c \ne 0$

ře ③ $(x_i - a_i) = \dfrac{-c_i}{2u} \Rightarrow$ a ② $\displaystyle\sum_i \left(\frac{-c_i}{2u}\right)^2 = \frac{1}{4u^2}\sum c_i^2 = r$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{1}{4r} \sum c_i^2 \quad | \ u > 0$$

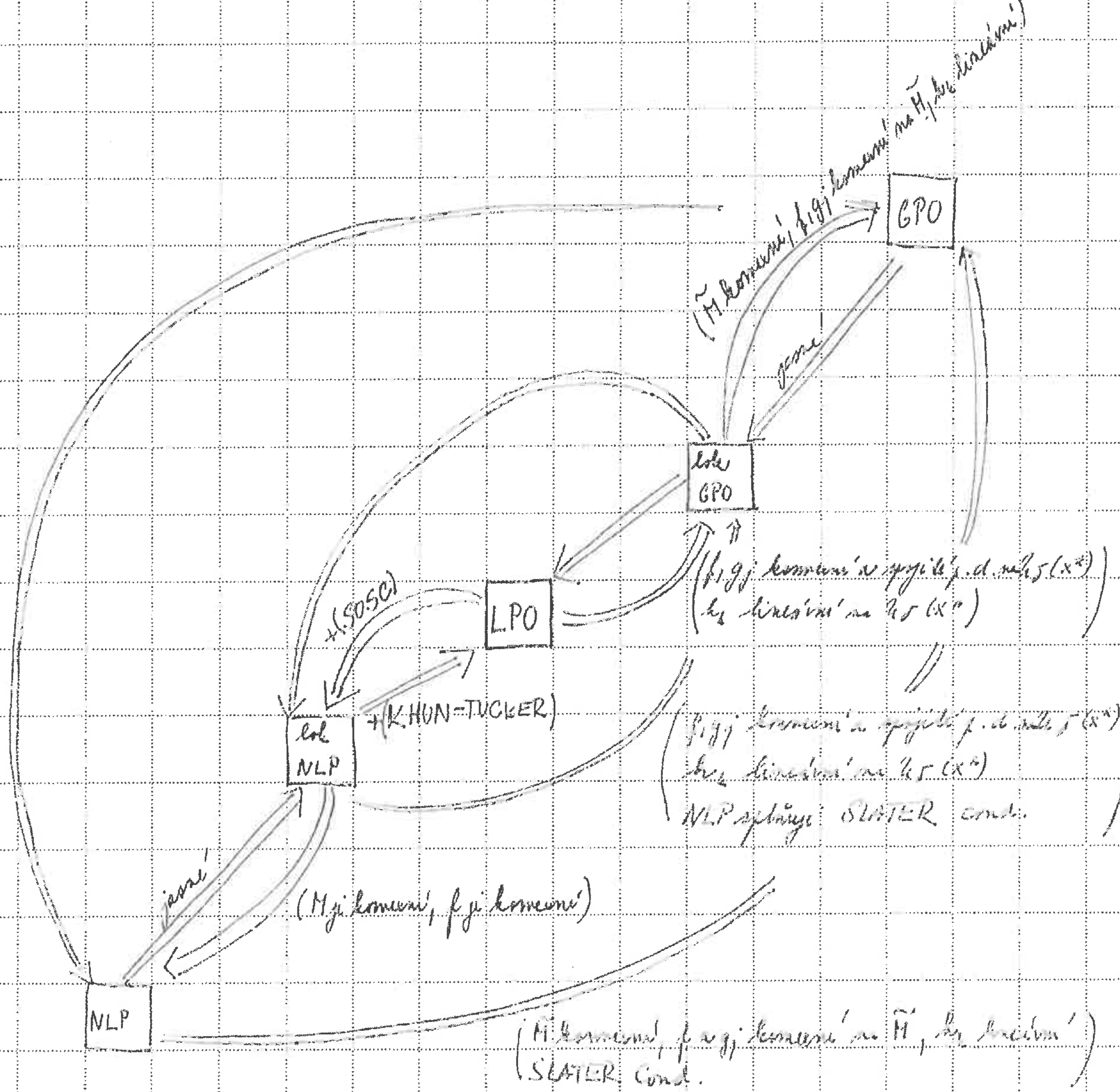
$$u = +\frac{1}{2\sqrt{r}} \sqrt{\sum c_i^2}$$

$$x_i = a_i - \frac{c_i}{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{r}} \sqrt{\sum c_i^2}} = a_i - \frac{c_i \sqrt{r}}{\sqrt{\sum c_i^2}}$$

$$(x^*, u^*) \text{ splňující LPO: } \left(a_1 - \frac{c_1\sqrt{r}}{\sqrt{\sum c_i^2}}, \dots, a_n - \frac{c_n\sqrt{r}}{\sqrt{\sum c_i^2}};\ \frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\sum c_i^2}\right)$$

NMEK531 Matematická ekonomie

NLP: vztahy.



<u>Pozn.</u> * Nechť g_j, h_k jsou lineární funkce. Pak K-T je splněno v každém bodě M

* Nechť g_j jsou diferencovatelné konvexní funkce a h_k jsou lineární fce, pak, je-li splněna Slaterova podmínka, pak K-T je splněno na celé M.