DP Krajča [ved. Kopa]

Teorie her  Lmarno fit. vutbr. cz / hruby / THE
pcolla. fit. vutbr. cz / ...
www. ... edu / ... / Game ... Theory

TH = disciplína zkoumající rac. chování při rozhodování

HRA = strategická interakce dvou a více hráčů

racionálně chovající hráči

HRY — kooperativní
— nekooperativní [bez vyjednávání, komunikace]
→ hráč vybírá z konečné mn. strategií s cílem max. zisk
TENIS, VÁLKY

HRY — s nulovým součtem [shift-konst.] $L=0$
— s nenulovým součtem
– konstantní s. $\forall x \in X: \sum_{i \in Q} f_i(x) = L$, $L \neq 0$

→ $n \in N$ hráčů, $i$-tý hráč má mn. strategií $X_i$

$$f_i(x_1, \dots, x_n): X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to \mathbb{R}$$
$x_1 \in X_1$, $x_n \in X_n$

strategie ostatních hráčů

strategická hra $N$ hráčů
$\Gamma = (Q, (X_i)_{i\in Q}, (f_i)_{i \in Q})$
$Q = \{1, \dots, n\}$
$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$

"optimální"

def. [Nashovo ekvilibrium] * Říkáme, že $n$-tice $(x_1, \dots, x_n)$ je Nashovo ekvilibrium, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq$
$\geq f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ pro vš. strategie $y_i \in X_i$.

$\exists x_i$, je pevným ... jednoz.

* Platí-li ostrá nerovnost pro $\forall y_i \in X_i$, $y_i \neq x_i$ ⇒ silné N. ekvilibrium
* Když je $(x_1, \dots, x_n)$ N. ekvilibrium. Jestliže pro nějakého hráče $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje strategie $y_i \in X_i$, $y_i \neq x_i$, taková, že $f_i(\dots, x_i, \dots) = f_i(\dots, y_i, \dots)$, hovoříme o slabém N. ekv.

$(q,\dots,q,1,q,\dots,0)$

$\Rightarrow$ pst že "ryzí strategie"

**def.** Smíšenou strategií $\alpha_i$ hráče $i$ rozumíme pstní rozdělení na mn. strategií $X_i$.

**V. (Nash):** Každá hra (uvažujeme-li smíšené strategie) s kon. počtem hráčů a kon. počtem strategií má aspoň 1 N.E.

**Tvrzení (**):** Smíšená strategie $\alpha^*$ ve strategické hře s kon. počtem hráčů a kon. počtem strategií je NE $\iff$ pro každého hráče $i$

(i) očekávaná výplata (při daném $\alpha^*_{-i}$), které $\alpha^*_i$ přiřazuje pozitivní pst, je stejná;

(ii) oč. výplata ($\alpha^*_{-i}$ dáno), které $\alpha^*_i$ přiřazuje 0 pst, je nejvýše oč. výplata, jíž je přiřazena kladná pst.

všechny strat. $i$ je stejná

(+ vyplývá že NE ... ale musí ...)

**Alg.:**

1. Pro každého hráče $i$, vyber podmnožinu $S_i$ jeho mn. $X_i$
2. Ověř, existuje-li smíšená strategie $\alpha$ tak, že: (i) množina akcí, které je přiřazena kladná pst, je $S_i$; (ii) $\alpha$ splňuje podmínky (**)
3. Opakuj analýzu pro každou kolekci podmnožin akcí

... $3\times 3$ ...

$\{(0,1),(1,0),(q,1-q)\}\times\{(0,1),(1,0),(p,1-p)\}$, $p,q\in(0,1)$

**Příklad:**

(a) $Q=\{1,2\}$, $X_1=\{2,3\}$, $X_2=\{2,3\}$, $f_1(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$, $f_2(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}$

Řešení:

| 1 \ 2 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 2 | 4, 1 | 6, 2/3 |
| 3 | 6*, 3/2* | 9*, 1 |

$\boxed{x_1^*=3,\ x_2^*=2}$ ← hodnota podílu nejvyšší

změna v ryzích strategiích!

dle Tvrzení (**) $\{(0,1),(1,0)\}$

oč. výpl. pro 1: $2:4$, $3:6$ || pro 2: $2: 3/2$, $3: 1$

(b) $Q=\{1,2\}$

| | $B_1$ | $B_2$ | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2*, −3 | 1, 4* | $p$ |
| $A_2$ | 1, 1* | 3*, 0 | $1-p$ |
| | $q$ | $1-q$ | |

$p,q\in(0,1)$

není N.E. v čistých strat.

Řešení:

oč. výplata A: $\pi_A = 2\cdot \underbrace{P[A=A_1,B=B_1]}_{pq} + 1p(1-q) + 1\cdot q(1-p) + 3(1-p)(1-q) \Rightarrow$

$\pi_A = p(3q-2)-2q+3$

oč. výplata B: $\pi_B = -3pq + q(1-p) + 4p(1-q) + 0(1-p)(1-q) \Rightarrow$

$\pi_B = -8pq+4p+q$

$\frac{\partial \pi_A(p,q)}{\partial p} = 3q-2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q = 2/3$ $\qquad$ $\frac{\partial \pi_B(p,q)}{\partial q} = -8p+1 = 0 \Rightarrow p = 1/8$

N.E.: $\{(p,1-p),(q,1-q)\} = \{(1/8, 7/8), (2/3, 1/3)\}$

Ověř dle Tvrzení (**): (i): oč. výplata hráče A: $A_1 = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}$, $A_2 = 1\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ || oč. výplata hráče B: $B_1: -\frac{3}{8}+\frac{7}{8} = \frac{1}{2}$ ✓, $B_2: \frac{4}{8}+0 = \frac{1}{2}$

Uvažujeme-li ... (pro) ... $\{(p,1-p),(q,1-q)\}$: $A_1: 2q+(1-q)$, $A_2: q+3(1-q)$ ... $p=2/3$; $B_1: -3p+(1-p)$, $B_2: 4p$ ... $p=1/8$

$\{(1,0),(1,0)\}$: $A = A_1: 2$, $A_2: 1$ ... $B: B_1: -1$ ... $B_2: 4$ ... $\geq$ ...

? $\{(1,0),(0,1)\}$ $\times_{NE}$: $A_1 = [1]$ pozitivní, $A_2 = 3$ $\Rightarrow$ (ii) ✗ || $B_1 = -3$, $B_2 = [4]$ o.k.

ad Příklad 1:

(c) [Souměrnicka' hádka]

měli vyhrát jednu hrachu, ale musí se dohodnout, pohyb, ne → nic

|  |  | Bratr: MÍČ | PANENKA |  |
|---|---|---|---|---|
| Sestra | MÍČ | 2, 4 | 0, 0 | $p$ |
|  | PANENKA | 0, 0 | 4, 2 | $1-p$ |
|  |  | $q$ | $1-q$ |  |

čisté: (MÍČ, MÍČ), (PAN, PAN)

Řešení: $\pi_{SESTRA}(p,q) = 2pq + 0p(1-q) + 0q(1-p) + 4(1-q)(1-p) =$

$= 6pq - 4p - 4q + 4$

$\pi_{BRATR}(p,q) = 4pq + 2(1-p)(1-q) =$

$= 6pq - 2p - 2q + 2$

$\frac{\partial \pi_{SESTRA}(p,q)}{\partial p} = 6q - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q = 2/3$ $\qquad$ $\frac{\partial \pi_{BRATR}(p,q)}{\partial q} = 6p - 2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q = 1/3$

$\{(p, 1-p), (q, 1-q)\} \stackrel{Sest}{=} \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ oč. h. $\frac{4}{3}$ a $\frac{4}{3}$

+ v ryzích strategiích (MÍČ, MÍČ) a (PANENKA, PANENKA) [z def.]

(2, 4) $\qquad$ (4, 2)

ale žádná dominující dominující $f_1(p,q) \geq f_1(x,n)$ a $f_2(p,q) \geq f_2(x,n)$]

(d) [KÁMEN, NŮŽKY, PAPÍR]

| A \ B | K | N | P |  |
|---|---|---|---|---|
| K | 0 | 1 | −1 | $p_1$ |
| N | −1 | 0 | 1 | $p_2$ |
| P | 1 | −1 | 0 | $1-p_1-p_2$ |
|  | $q_1$ | $q_2$ | $1-q_1-q_2$ |  |

nemá NASHE v čistých

Řešení:

PRO KOMPLETNÍ MIX

* $\pi_A(p_1, p_2, q_1, q_2) = \pi_A = 0p_1q_1 + 1p_1q_2 - 1p_1(1-q_1-q_2) - 1q_1p_2 + 0p_2q_2 + 1p_2(1-q_1-q_2)$

$+ 1q_1(1-p_1-p_2) - 1\cdot q_2(1-p_1-p_2) + 0\cdot(1-p_1-p_2)(1-q_1-q_2) =$

$= p_1q_2 - p_1 + p_1q_1 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_2 - p_2q_1 - p_2q_2 + q_1 - p_1q_1 - p_2q_1$

$- q_2 + p_1q_2 + p_2q_2 = -p_1 + p_2 + q_1 - q_2 + 3p_1q_2 - 3p_2q_1$

[PRO MIX 2 je NE!

* $\pi_B = p_1 - p_2 - q_1 + q_2 - 3p_1q_2 + 3p_2q_1$

$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_2 = 1/3$ $\qquad$ $\frac{\partial \pi_B}{\partial q_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p_2 = 1/3$

$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_1 = 1/3$ $\qquad$ $\frac{\partial \pi_B}{\partial q_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow p_1 = 1/3$

$\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ → JEDINÉ!!

Příklad 2: (Duopol) Saudská Arábie, Írán tajná dohoda, nemění vzájemné snahy ve snaze udržet vysoké světové ceny

Výplatní tabulka:

| S.A. \ Írán | Nízká P | | Vysoká P | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nízká P | 70 | 70 | 40 | 80* | $p$ |
| Vysoká P | 80* | 40 | 50* | 50* | $1-p$ |
| | $q$ | | $1-q$ | | |

Nashova rovn. v ryzích strategiích jediná

Řešení: $\pi_{SA} = 70pq + 40p(1-q) + 80(1-p)q + 50(1-p)(1-q) =$

$= 70pq + 40p - 40pq + 80q - 80pq + 50 - 50q - 50p + 50pq =$

$= -10p + 30q + 50 \Rightarrow \frac{\partial \pi_{SA}}{\partial p} = -10 \neq 0$

$\pi_I = 70pq + 80p(1-q) + 40q(1-p) + 50(1-p)(1-q) = \dots \Rightarrow \frac{\partial \pi_I}{\partial q} = \text{konst.} \neq 0$ ...