či $P \in \mathcal{P} = \{P : E_P[X] = \mu, E_P[X-\mu]^2 = \sigma^2\}$ ... dobré pouze první dva momenty (zjištěné z dat)

- $CVaR_\alpha^{wc}(X) = \min_{x \in R} \sup_{P \in \mathcal{P}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} E[X-a]^+ \right\}$

→ • $VaR_\alpha^{wc}(X) = CVaR_\alpha^{wc}(X)$ $\quad (VaR_\alpha(X) < CVaR_\alpha(X))$

IV. Užitková funkce

- užitková fce = fce přiřazující majiteli užitek, který mu jeho majetek přináší
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\max_{x \in X} E u(\sum \rho_i x_i)$ ... kritérium očekávaného užitku

- otázka vhodné volby užitkové fce!
- optimalizace & podmínka na minimální očekávaný výnos, podmínka $\sum x_i = 1$
- ρ_i ... klasický výnos (cena dnešní − cena minulá)/cena minulá

  ... hrubý výnos

→ možné dva přístupy

- každý jedinec má jinou užitkovou fci (dle věku, postavení
- třídy užitkových fcí
  - neklesající (více majetku - lépe) - VŽDY: nenasycenost
  - přednost bezrizikovému aktivu - ČASTO: riziková averze

  výjimka: „risk seeking" = „riziko vyhledávající" - např. loterie (záporná střední hodnota)

  - rizikově neutrální - např. milionáři a hra o tisíc korun (výsledek je mu jedno)
- přístup k riziku se u jednoho jedince s různým objemem majetku může měnit

→ rizikově averzní investor: $u(W + E\varepsilon) > E[u(W+\varepsilon)]$

u ... užitková fce

W ... počáteční majetek

ε ... náhodná hra (investice)

→ rizikově neutrální investor: $\quad =$

→ riziko vyhledávající investor: <

- na všech hladinách majetku W = globálně (averzní)
- riziková averze → konkávní užitková fce

riziko vyhledávající → konvexní — || —

- <u>koeficient</u> rizikové averze (Arrow-Pratt, absolutní):

$$ARA(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)} > 0 \text{ pro rizikově averzního investora}$$

- čím ↑ koeficient, tím ↑ rizikově averzní investor

→ neklesající + konkávní užitková fce

- předp: rizikově averzní investor + normalita (či eliptické rozdělení) výnosů

⇒ mean-variance efficient optimální řešení získané Markowitzem

- <u>Př</u>: předp. normality výnosů je $\sim N(c, V)$

$$\Rightarrow \max_{x \in X} E(\rho^T x) = c^T x$$ → konkávní & rostoucí

exponenciální užitková fce $u(z) = 1 - \exp\{-az\}$, $a > 0$

ZK ⟺ lze přepsat na Markowitze:

$$\max_{x \in X} E\left(1 - e^{\{-a\rho^T x\}}\right) = \min_{x \in X} E_\rho\left(e^{\{-a\rho^T x\}}\right) =$$

$$= \min_{x \in X} \int \rho \cdot e^{-a\rho} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\rho-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\rho = \dots$$

$$\Rightarrow \max_{x \in X} \{c^T x - \frac{a}{2} \cdot x^T V x\} \quad \text{Markowitz}$$

- <u>exponenciální fce</u>: $ARA(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)} = \frac{a^2 \cdot \cancel{e^{-az}}}{\cancel{e^{-az}} \cdot a} = a$

na ∀ úrovních majetku je riziková averze stejná (= a)

→ ekonomy zpochybňováno: koeficient rizikové averze by měl <u>klesat</u>

hyperbola

→ HARA užitkové fce: ARA(z) je klesající

• např: $ARA(z) = \frac{1}{az+b}$ ... HARA fce

$$-\frac{u''(z)}{u'(z)} = \frac{1}{az+b} \iff \frac{\partial \ln u'(z)}{\partial z} = \frac{-1}{az+b}$$

$$u_{HARA}(x) = \begin{cases} \frac{c}{a-1}(ax+b)^{\frac{a-1}{a}} + d & ; a\neq 0, a\neq 1; ax+b>0 \\ c\cdot\ln(x+b)+d & ; x+b>0 \quad a=1 \\ -c\cdot e^{-\frac{1}{b}x} + d & ; b>0 \quad a=0 \end{cases}$$

kde $c \geq 0, d \in \mathbb{R}$

→ mocninná | logaritmická | exponenciální HARA fce

kvadratická užitková fce: $u_k(x) = -\frac{c}{2}(b-x)^2$, ale! $c>0, b>x$

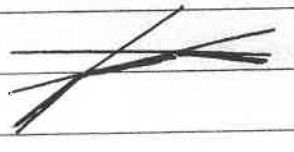
$ARA_k(x) = \frac{1}{b-x}$ není klesající!

• úloha kvadratického programování - výhoda

• opět dává stejný výsledek jako Markowitz

po částech lineární fce: $u_{PL}(x) = \min_{i\in I}(a_i x + b_i)$

• úloha lineárního programování - výhoda



u_{PL}

- Určení užitkové fce

• dotazníková metoda - pouze aproximace

• eficientní řešení vzhledem ke ∀ rostoucím konkávním užitkovým fcím

→ stochastické uspořádání:

ξ_1 dominuje ξ_2, pokud $Eu(\xi_1) \geq Eu(\xi_2)$ ∀ u ze třídy

užitkových fcí u
⇒ stochastická dominance 1. řádu : $\forall$ neklesající fce
2. řádu : $\forall$ konkávní &
rizikově averzní ⇔ neklesající fce

- Levy + Hanoch (1969)

$\xi_1 \geq_{FSD} \xi_2 \iff F_{\xi_1}(x) \leq F_{\xi_2}(x) \ \forall x$ 1 řád

$\xi_1 \geq_{SSD} \xi_2 \iff \int_{-\infty}^{t} (F_{\xi_1}(x) - F_{\xi_2}(x)) \leq 0 \ \forall t$ 2 řád

rizikově averzní investor

pro alespoň 1 investora je to

- umíme-li porovnávat ⇒ optimální řešení (eficientní & FSD | SSD, pokud $\nexists$ žádné jiné portfólio (z nekonečně mnoha) lepší pro všechny užitkové fce)
pouze od 2 řádu
(pro FSD neplatí !)

- otestovat umíme pouze pro diskrétní či eliptická rozdělení
[eficienci portfólia vzhledem ke stochastické dominanci

- za předp. normality výnosů je eficientní portfólio vzhledem ke stochastické dominanci eficientní vzhledem k Markowitzovi