Členy řady (14) s nízkými frekvencemi aproximují dobře odpovídající členy řady (10), neboť

$$\begin{aligned} e^{-k^2\tau} &= 1 - k^2\,\tau + \tfrac{1}{2}\,k^4\,\tau^2 - \dots \\ \lambda(k) &= 1 - 2\,\mu\,[\tfrac{1}{2}\,(k\,h)^2 - \tfrac{1}{24}\,(k\,h)^4 + \dots] = 1 - k^2\,\tau + \tfrac{1}{12}\,k^4\,\tau\,h^2 - \dots . \end{aligned}$$

Tyto rozvoje představují alternativní prostředek pro vyšetřování chyby diskretizace, kterou nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{h,\tau}(x_j,t_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(m\,\pi)^2\,\tau} - \lambda(m\,\pi)}{\tau}\,A_m\,e^{\mathrm{i}\,m\,\pi\,x_j - (m\,\pi)^2\,t_n}\,.$$

Lze tedy očekávat alespoň přesnost prvního řádu a pro $h^2 = 6\,\tau$ přesnost druhého řádu (srv. pozn. 2). Rigorózní důkaz je založen na následujícím lemmatu.

Lemma 1 *Platí*

$$|e^{-k^2\tau} - \lambda(k)| \le C(\mu)\,k^4\,\tau^2 \qquad \forall\ k,\tau > 0\,, \tag{16}$$

kde $C(\mu)$ závisí pouze na μ. Pokud $\mu = \frac{1}{6}$, pak

$$|e^{-k^2\tau} - \lambda(k)| \le \frac{4}{15}\,k^6\,\tau^3 \qquad \forall\ k,\tau > 0\,.$$

Důkaz. Z Taylorova vzorec plyne, že existují $\xi,\widetilde{\xi} \in (0,k^2\tau)$ a $\zeta,\widetilde{\zeta} \in (0,kh)$ takové, že

$$\begin{aligned} |e^{-k^2\tau} - \lambda(k)| &= \frac{1}{12}\,|6\,k^4\,\tau^2\,e^{-\xi} - k^4\,h^2\,\tau\cos\zeta| \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{6\,\mu}\right)k^4\,\tau^2\,, \\ |e^{-k^2\tau} - \lambda(k)| &= \frac{1}{360}\,|60\,k^6\,\tau^3\,e^{-\widetilde{\xi}} - k^6\,h^4\,\tau\cos\widetilde{\zeta}| \le \frac{4}{15}\,k^6\,\tau^3 \qquad \text{pro} \quad \mu = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

□

Z odhadu (16) vidíme, že abychom při konstantním μ získali stejnoměrný odhad chyby diskretizace prvního řádu přesnosti, je vhodné požadovat, aby $\pi^4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m|\,m^4 < \infty$. Tato hodnota představuje odhad $|u_{xxxx}| = |u_{tt}|$ a dostáváme tedy odhad (9).

Vyjádření řešení úlohy (1)–(3) ve tvaru řady (10) ukazuje, že pro libovolné vlnové číslo $k = m\,\pi$ zůstává amplituda příslušné složky řešení v čase omezená. Je přirozené tuto vlastnost požadovat i od přibližného řešení. Řekneme proto, že numerická metoda pro řešení úlohy (1)–(3) je stabilní, pokud existuje konstanta K nezávislá na k taková, že $|[\lambda(k)]^n| \le K$ pro všechna k a n. To je ekvivalentní požadavku, aby $|\lambda(k)| \le 1$ pro všechna k.

Věta 3 *Nechť pro dané hodnoty h a τ je $|\lambda(m\,\pi)| \le 1$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Pak řešení schématu (6)–(8) zůstává pro libovolnou počáteční podmínku u^0 splňující (12) omezené pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Jelikož $|\lambda(m\,\pi)| \leq 1\ \forall\ m \in \mathbb{N}$, je dle (14) a (12)

$$|U_j^n| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m|\,|\lambda(m\,\pi)|^n \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m| < \infty\,.$$

□

Poznámka 4 Nechť existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $|\lambda(m_1\,\pi)| > 1$. Buď $u^0(x) = \sin(m_1 \pi x)$. Pak podle (15) je $U_j^n = \sin(m_1 \pi j h)\,[\lambda(m_1\pi)]^n$, a tudíž $|U_j^n| \to \infty$ pro $n \to \infty$ a pro každé $j \in \{1, \dots, J-1\}$ takové, že $\sin(m_1 \pi j h) \neq 0$.

Nyní vidíme význam podmínky $\mu \leq \frac{1}{2}$. Je-li tato podmínka splněna, pak $|\lambda(m\,\pi)| \leq 1$ $\forall\ m \in \mathbb{N}$, a řešení tudíž zůstává omezené. Je-li $\mu > \frac{1}{2}$, pak pro některá $m \in \mathbb{N}$ je $\lambda(m\,\pi) < -1$ a velikost příslušných členů v (14) s postupujícím časem roste nade všechny meze. Teoreticky je možné zvolit počáteční podmínku tak, aby $A_m = 0$, kdykoli $\lambda(m\,\pi) < -1$. Avšak to je velmi speciální situace a vpraxi by vlivem zaokrouhlovacích chyb vznikly malé nenulové koeficienty u všech takovýchto členů a s postupujícím časem by tyto členy opět neomezeně rostly. Schéma (6) je tedy stabilní pouze při splnění podmínky $\mu \leq \frac{1}{2}$. Říkáme, že schéma (6) je *podmíněně stabilní*.

Fourierovu metodu můžeme použít též k důkazu konvergence. Její výhoda spočívá v tom, že nemusíme předpokládat dostatečnou hladkost řešení u a stejnoměrnou omezenost u_{xxxx} a u_{tt}. Naším jediným předpokladem o úloze (1)–(3) nyní bude absolutní konvergence řady (11) pro počáteční podmínku u^0. Počáteční podmínka tedy nemusí být hladká. Budeme předpokládat, že μ je pevné a $\mu \leq \frac{1}{2}$. Chybu aproximace můžeme vyjádřit ve tvaru

$$e_j^n = U_j^n - u(x_j, t_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m\, e^{\mathrm{i}\, m\,\pi\, x_j} \left\{ [\lambda(m\,\pi)]^n - e^{-(m\,\pi)^2\, t_n} \right\}.$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a nechť $m_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že

$$\sum_{|m|>m_0} |A_m| \leq \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Pak

$$|e_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{|m|\leq m_0} n\,|A_m|\,|\lambda(m\,\pi) - e^{-(m\,\pi)^2\,\tau}|$$

kde jsem vyuužili toho, že pro libovolná čísla $\lambda_1, \lambda_2 \in [-1, 1]$ platí $|\lambda_1^n - \lambda_2^n| \leq n\,|\lambda_1 - \lambda_2|$. Z nerovnosti (16) plyne

$$|e_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + n\,\tau^2\, C(\mu)\,\pi^4 \sum_{|m|\leq m_0} |A_m|\, m^4$$

Vidíme tedy, že pro τ dostatečně malé je $|e_j^n| \leq \varepsilon\ \forall\ (x_j, t_n) \in [0,1]\times[0,T]$, neboť $n\,\tau \leq T$.

Při aplikaci Fourierovy metody jsme reprezentovali přibližné řešení pomocí nekonečné řady (14), neboť ji bylo možné snadno srovnávat s řadou pro přesné řešení. Jelikož však na uvažované prostorové síti s $J+1$ uzly lze reprezentovat jen konečně mnoho různých frekvencí, lze přibližné řešení vyjádřit jako lineární kombinaci $2\,J$ po sobě jdoucích funkcí

$$e^{\mathrm{i}\,m\,\pi\,j\,h}\,[\lambda(m\,\pi)]^n\,. \tag{17}$$

Snadno ověříme, že tyto funkce se skutečně nezmění, nahradíme-li m hodnotou $m+2\,J$. Můžeme tedy např. uvažovat U_j^n jakožto lineární kombinaci funkcí (17) odpovídajících

$$m = -(J-1), -(J-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, J\,.$$

Implicitní metoda pro úlohu (1)–(3)

Podmínka stability $\tau \le h^2/2$ plynoucí z věty 3 pro explicitní schéma (6) je velmi vážné omezení, které implikuje, že bude třeba velmi mnoho časových kroků. Navíc, budeme-li muset zmenšit h pro zvýšení přesnosti, velmi se zvýší celková výpočetní náročnost, neboť budeme muset též podstatně zmenšit τ. Ukážeme nyní, že zmíněných omezení se můžeme zbavit použitím zpětné diference pro diskretizaci časové derivace v (1), tj. použitím schématu

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^{n+1}-2\,U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}}{h^2}\,.$$

Toto schéma lze přepsat do tvaru

$$-\mu\,U_{j-1}^{n+1} + (1+2\,\mu)\,U_j^{n+1} - \mu\,U_{j+1}^{n+1} = U_j^n\,, \qquad j=1,2,\dots,J-1\,, \quad n \ge 0\,. \tag{18}$$

Jedná se o příklad *implicitní metody*. Danou hodnotu U_j^{n+1} nyní nelze určit nezávisle na ostatních hodnotách na časové hladině t_{n+1}, nýbrž všechny tyto hodnoty získáme současně vyřešením soustavy $J-1$ lineárních rovnic pro $J-1$ neznámých.

Stabilitu schématu (18) s okrajovými a počátečními podmínkami (7) a (8) můžeme vyšetřovat Fourierovou metodou analogicky jako pro schéma (6). Snadno zjistíme, že funkce $U_j^n = e^{\mathrm{i}\,k\,j\,h}\,\lambda^n$ splňuje (18) právě tehdy, když

$$\lambda \equiv \lambda(k) = \frac{1}{1+4\,\mu\,\sin^2\frac{k\,h}{2}}\,.$$

Tedy $\lambda(k) \in (0,1]$ pro libovolné $\mu > 0$ a libovolné $k \in \mathbb{R}$. Říkáme, že metoda je *nepodmíněně stabilní.*

Thomasův algoritmus

Soustava (18) je tridiagonální a můžeme ji zapsat ve tvaru

$$-a_j\,U_{j-1} + b_j\,U_j - c_j\,U_{j+1} = d_j\,, \qquad j=1,2,\dots,J-1\,,$$

kde

$$U_0 = U_J = 0\,.$$

Budeme předpokládat, že

$$a_j > 0\,, \qquad b_j > 0\,, \qquad c_j > 0\,, \qquad b_j > a_j + c_j\,, \tag{19}$$

což splňuje (18). Soustavu rovnic nejprve převedeme na soustavu s horní trojúhelníkovou maticí tvaru

$$U_j - e_j\,U_{j+1} = f_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1\,. \tag{20}$$

Máme-li v tomto tvaru k–tou rovnici a chceme-li upravit $k+1$–vou rovnici, tj.

$$-a_{k+1}\,U_k + b_{k+1}\,U_{k+1} - c_{k+1}\,U_{k+2} = d_{k+1}\,,$$

pak k této rovnici přičteme rovnici (20) s $j = k$ přenásobenou a_{k+1}, čímž získáme

$$(b_{k+1} - a_{k+1}\,e_k)\,U_{k+1} - c_{k+1}\,U_{k+2} = d_{k+1} + a_{k+1}\,f_k\,.$$

Algoritmus je tedy následující

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e_1 := c_1/b_1,\;\; f_1 := d_1/b_1}\\
&\texttt{for}\ \mathrm{j = 2, \ldots, J-2}\ \texttt{do}\\
&\quad \mathrm{e_j := c_j/(b_j - a_j\,e_{j-1})}\\
&\quad \mathrm{f_j := (d_j + a_j\,f_{j-1})/(b_j - a_j\,e_{j-1})}\\
&\texttt{enddo}\\
&\mathrm{f_{J-1} := (d_{J-1} + a_{J-1}\,f_{J-2})/(b_{J-1} - a_{J-1}\,e_{J-2})}
\end{aligned}$$

Řešení U_j pak jednoduše určíme z rovnic (20).

Snadno lze ověřit, že $e_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, J-2$. Algoritmus lze tedy vždy provést a je numericky stabilní (nevede ke vzrůstajícím chybám).

Uvedený algoritmus potřebuje pro vyřešení soustavy (18) na jeden uzel tři sčítání, tři násobení a dvě dělení, zatímco explicitní schéma (6) vyžaduje tři sčítání a dvě násobení (popř. čtyři sčítání a jedno násobení). Výpočetní náročnost implicitního schématu je tedy asi dvojnásobná oproti explicitnímu schématu. Důležité však je, že lze volit mnohem delší časové kroky (aniž by se zhoršila přesnost), neboť nyní není žádná podmínka stability omezující volbu τ. Proto je celková výpočetní náročnost implicitní metody pro dosažení zvoleného času T mnohem menší než u explicitní metody.

Dvoukrokové metody[1]

Výše uvažované metody pro řešení úlohy (1)–(3) jsou druhého řádu přesnosti v prostoru, avšak obecně pouze prvního řádu přesnosti v čase. Nabízí se proto uvažovat pro diskretizaci časové derivace místo jednostranné diference centrální diferenci. To vede v nejjednodušším případě ke schématu

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} = \frac{U_{j+1}^n - 2\,U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1\,, \quad n \geq 1\,. \tag{21}$$

[1] Tato část nebyla odpřednášena a nebude zkoušena

Snadno zjistíme, že chyba diskretizace je v tomto případě druhého řádu v čase i v prostoru.

Uvedené schéma je příkladem dvoukrokového schématu, neboť k určení hodnot U_j^{n+1} nestačí znát hodnoty U_j^n, ale potřebujeme též hodnoty U_j^{n-1}. Přibližné řešení tedy závisí nejen na počáteční podmínce, ale též na hodnotách v čase t_1. Tyto hodnoty buď musíme předepsat, a nebo musíme stanovit postup, jak je určit. Obvykle se pro určení hodnot U_j^1 použije nějaké jednokrokové schéma. Metody, které zahrnují více než dvě časové hladiny, se souhrnně nazývají vícekroková schémata.

Hodnoty přibližného řešení v čase t_1 zapíšeme ve tvaru

$$U_j^1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \, e^{\mathrm{i}\, m\, \pi\, j\, h}\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, J\,, \tag{22}$$

a opět předpokládáme, že řada konverguje absolutně a že $B_m = -B_{-m}$ $\forall\, m \in \mathbb{Z}$. Podobně jako při Fourierově analýze jednokrokových metod výše hledejme nejprve řešení diferenčního schématu ve tvaru se "separovanými proměnnými", tj. položme

$$U_j^n = e^{\mathrm{i}\, k\, j\, h}\, \widehat{U}^n(k)\,,$$

kde $k = m\,\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Dosazením do (21) získáme

$$\widehat{U}^{n+1}(k) + 2\, q(k)\, \widehat{U}^n(k) - \widehat{U}^{n-1}(k) = 0\,, \quad n \geq 1\,, \quad \text{kde } q(k) = \frac{4\,\tau}{h^2}\, \sin^2 \frac{k\,h}{2}\,. \tag{23}$$

Charakteristický polynom $\lambda^2 + 2\, q(k)\, \lambda - 1$ této soustavy diferenčních rovnic má dva různé reálné kořeny $\lambda_\pm = -q(k) \pm \sqrt{q(k)^2 + 1}$, a tudíž obecné řešení soustavy (23) je

$$\widehat{U}^n(k) = \alpha_+(k)\, \lambda_+(k)^n + \alpha_-(k)\, \lambda_-(k)^n\,, \tag{24}$$

kde koeficienty $\alpha_\pm$ jsou libovolná komplexní čísla. Tato čísla určíme tak, aby platilo $\widehat{U}^0(m\,\pi) = A_m$ a $\widehat{U}^1(m\,\pi) = B_m$. Z toho plyne

$$\alpha_+(m\,\pi) = \frac{B_m - A_m\, \lambda_-(m\,\pi)}{\lambda_+(m\,\pi) - \lambda_-(m\,\pi)}\,, \qquad \alpha_-(m\,\pi) = \frac{A_m\, \lambda_+(m\,\pi) - B_m}{\lambda_+(m\,\pi) - \lambda_-(m\,\pi)}\,. \tag{25}$$

Řešení diskrétního problému (21), (8), (7), (22) je pak dáno řadou

$$U_j^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\, m\, \pi\, j\, h}\, \widehat{U}^n(m\,\pi)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, J\,, \quad n \geq 0\,. \tag{26}$$

Bohužel složky řešení odpovídající kořenu λ_- jsou nestabilní, neboť $\lambda_-(k) < -1$, kdykoli $\sin(\frac{1}{2}\, k\, h) \neq 0$. Schéma (21) je tedy bezcenné, neboť je pro libovolnou volbu h a τ nestabilní.

Poznamenejme, že pokud charakteristický polynom soustavy diferenčních rovnic odpovídajících dvoukrokovému schématu má pro dané k jeden dvojnásobný kořen, tj. $\lambda_+(k) = \lambda_-(k) \equiv \lambda(k)$, má obecné řešení soustavy diferenčních rovnic tvar

$$\widehat{U}^n(k) = \alpha(k)\, \lambda(k)^n + \beta(k)\, n\, \lambda(k)^{n-1}\,,$$

kde $\alpha(k), \beta(k) \in \mathbb{C}$. V tomto případě tedy je

$$\widehat{U}^n(m\,\pi) = A_m\,\lambda(m\,\pi)^n + [B_m - A_m\,\lambda(m\,\pi)]\,n\,\lambda(m\,\pi)^{n-1}\,. \tag{27}$$

Pokud je koeficient u druhého členu nenulový, je ke stabilitě nutné, aby $|\lambda(m\,\pi)| < 1$, neboť jinak $\widehat{U}^n$ poroste lineárně v n.

Uvedená analýza schématu (21) samozřejmě neznamená, že každé dvoukrokové explicitní schéma je vždy nestabilní. Uvažujme např. schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} = \frac{\delta_x^2\,U_j^n + \delta_x^2\,U_j^{n-1}}{2\,h^2}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1\,, \quad n \geq 1\,. \tag{28}$$

V tomto případě získáme soustavu diferenčních rovnic

$$\widehat{U}^{n+1}(k) + q(k)\,\widehat{U}^n(k) + (q(k) - 1)\,\widehat{U}^{n-1}(k) = 0\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{29}$$

jejíž charakteristický polynom má kořeny $\lambda_+(k) = 1 - q(k)$ a $\lambda_-(k) = -1$. Je-li $q(k) \neq 2$, jsou oba kořeny různé a $\widehat{U}^n(k)$ je opět dáno vztahy (24) a (25). Zřejmě je $|\lambda_\pm(k)| \leq 1$ právě tehdy, když $q(k) \in [0, 2)$, z čehož plyne podmínka stability $\tau \leq h^2/2$. Je-li $q(k) = 2$, je $\lambda_+(k) = \lambda_-(k)$ a $\widehat{U}^n(k)$ je dáno vztahem (27) s $\lambda(k) = -1$. Případ $q(m\,\pi) = 2$ za uvedené podmínky stability může nastat pouze tehdy, je-li $m = (2\,l + 1)J$, kde $l \in \mathbb{Z}$. Členy s $m = (2\,l + 1)J$ se však v řešení neprojeví, neboť řadu (26) můžeme díky vlastnosti $\widehat{U}^n(m\,\pi) = -\widehat{U}^n(-m\,\pi)\ \forall\ m \in \mathbb{Z}$ zapsat ve tvaru

$$U_j^n = 2\,\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\,\pi\,j\,h)\,\widehat{U}^n(m\,\pi)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, J\,, \quad n \geq 0\,.$$

Schéma (28) je tedy pro $\tau \leq h^2/2$ stabilní.

Stabilita metody však nemusí znamenat, že diskrétní řešení bude bez oscilací. Jak jsme viděli, platí v případě $q(k) \neq 2$

$$\widehat{U}^n(k) = \alpha_+(k)\,(1 - q(k))^n + \alpha_-(k)\,(-1)^n\,.$$

Označíme-li

$$V_j^n = \sum_{\substack{m=-\infty \\ q(m\pi)<2}}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,m\,\pi\,j\,h}\,\alpha_+(m\,\pi)\,(1 - q(m\,\pi))^n\,, \qquad W^j = \sum_{\substack{m=-\infty \\ q(m\pi)<2}}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,m\,\pi\,j\,h}\,\alpha_-(m\,\pi)\,,$$

můžeme psát

$$U_j^n = V_j^n + (-1)^n\,W_j\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, J\,, \quad n \geq 0\,.$$

Síťová funkce W_j nezávisí na čase, a pokud je nenulová, bude pro velké n představovat dominantní složku řešení, neboť $V_j^n \to 0$ pro $n \to \infty$. Obvykle se projeví ve formě oscilací, jejichž velikost může být i větší než jsou hodnoty počáteční podmínky, jelikož velikost $\alpha_+(m\,\pi)$ a $\alpha_-(m\,\pi)$ může být podstatně větší než $|A_m|$. Ze stability metody však plyne, že tyto oscilace nebudou pro $n \to \infty$ narůstat. Navíc se jejich velikost zmenší, pokud zjemníme síť.

Časově nezávislá oscilující složka nebude v řešení schématu (28) přítomna, pokud řešení v čase t_1 určíme pomocí schématu (6). Podle (14) a (13) je pak totiž $B_m = A_m\,(1 - q(m\,\pi)) = A_m\,\lambda_+(m\,\pi)$, a tudíž $\alpha_-(m\,\pi) = 0$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$.

Disipace

Z diskuse v předchozím odstavci plyne, že je žádoucí, aby diferenční schéma vedlo v každém časovém kroku k poklesu amplitud vysokofrekvenčních složek řešení, tj. aby velikost příslušných amplifikačních faktorů byla menší než 1. Tento pokles vysokofrekvenčních oscilací se nazývá *disipace* a je charakterizován v následující definici.

Definice 1 Diferenční schéma je disipativní řádu $2\,r$ (má disipaci řádu $2\,r$), jestliže existuje kladná konstanta C nezávislá na h a τ taková, že každý amplifikační faktor $\lambda_j(k)$ splňuje

$$|\lambda_j(k)| \leq 1 - C\,\sin^{2r}\frac{k\,h}{2}\,. \tag{30}$$

Poznamenejme, že pro každé k uvažujeme obecně více amplifikačních faktorů, abychom do definice zahrnuli i vícekroková schémata. Pro ověřování platnosti podmínky (30) může být užitečné si všimnout, že (30) je ekvivalentní podmínce

$$|\lambda_j(k)|^2 \leq 1 - C'\sin^{2r}\frac{k\,h}{2}$$

s konstantou C' nezávislou na h a τ. Disipativnost schématu je případě parabolických rovnic velmi přirozeným požadavkem, neboť pak dochází v průběhu času ke zhlazování diskrétního řešení, stejně jako je tomu u řešení aproximované diferenciální rovnice.

Použitím vztahu (13) snadno zjistíme, že explicitní schéma (6) je disipativní řádu 2 pro $\mu \in [\mu_0, \mu_1] \subset (0, \frac{1}{2})$, kde μ_0 a μ_1 jsou konstanty nezávislé na h a τ. Proto se obvykle nepoužívá volba $\mu = \frac{1}{2}$, při níž je schéma (6) ještě stabilní. Implicitní schéma (18) je disipativní řádu 2 , je-li $\mu \geq \mu_0 > 0$, kde μ_0 je konstanta nezávislá na h a τ. Schéma (28) samozřejmě disipativní není.

θ–**metoda** (θ–schéma, metoda váženého průměru)

Uvažujeme-li vážený průměr explicitního schématu (6) a implicitního schématu (18), získáme šestibodové schéma

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \mu\,[\theta\,\delta_x^2\,U_j^{n+1} + (1-\theta)\,\delta_x^2\,U_j^n]\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1\,,\ \ n \geq 0\,. \tag{31}$$

Budeme předpokládat, že $\theta \in [0, 1]$. Pro $\theta = 0$ získáváme explicitní schéma (6) a pro $\theta = 1$ plně implicitní schéma (18). Pro libovolné $\theta \in (0, 1]$ je k určení hodnot přibližného řešení v čase t_{n+1} nutno vyřešit tridiagonální soustavu lineárních rovnic

$$-\theta\,\mu\,U_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\,\theta\,\mu)\,U_j^{n+1} - \theta\,\mu\,U_{j+1}^{n+1} = [1 + (1-\theta)\,\mu\,\delta_x^2]\,U_j^n\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1\,.$$

Koeficienty splňují nerovnosti (19), a můžeme tedy použít Thomasův algoritmus.

Stabilitu vyšetříme opět pomocí Fourierovy metody. Dosazením $U_j^n = e^{\mathrm{i}\,k\,j\,h}\,\lambda^n$ do (31) získáme

$$\lambda = \frac{1 - 4\,(1-\theta)\,\mu\,\sin^2\frac{k\,h}{2}}{1 + 4\,\theta\,\mu\,\sin^2\frac{k\,h}{2}}\,.$$