Zřejmě $\lambda < 1$. Nestabilita se může objevit pouze pokud $\lambda < -1$, což nastane právě tehdy, když

$$4\,(1-2\,\theta)\,\mu\,\sin^2\frac{k\,h}{2} > 2\,.$$

Z toho plyne, že

$$(32)\qquad \begin{cases} \text{Je-li } \theta \in [0,\tfrac12), \text{ pak (31) je stabilní} \iff \mu \le \dfrac{1}{2\,(1-2\,\theta)}\,. \\[2ex] \text{Je-li } \theta \in [\tfrac12,1], \text{ pak (31) je stabilní } \forall\ \mu > 0\,. \end{cases}$$

V prvním případě je tedy schéma podmíněně stabilní, v druhém nepodmíněně stabilní.

Chybu diskretizace schématu (31) je vhodné počítat v čase $t_{n+1/2} \equiv (n+\frac12)\,\tau$, tj. definujeme

$$\varepsilon_j^{n+1/2} = \varepsilon_{h,\tau}(x_j,t_{n+1/2}) = \frac{u(x_j,t_{n+1})-u(x_j,t_n)}{\tau} - \frac{\theta\,\delta_x^2\,u(x_j,t_{n+1}) + (1-\theta)\,\delta_x^2\,u(x_j,t_n)}{h^2}\,.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{h,\tau}(x,t) &= \frac{\delta_t\,u(x,t)}{\tau} - \frac{\theta\,\delta_x^2\,u(x,t+\frac{\tau}{2}) + (1-\theta)\,\delta_x^2\,u(x,t-\frac{\tau}{2})}{h^2} \\ &= \frac{\delta_t\,u(x,t)}{\tau} - (\theta-\tfrac12)\,\frac{\delta_t\,\delta_x^2\,u(x,t)}{h^2} - \frac{\delta_x^2\,u(x,t+\frac{\tau}{2}) + \delta_x^2\,u(x,t-\frac{\tau}{2})}{2\,h^2}\,. \end{aligned}$$

Dosazením Taylorových rozvojů získáme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{h,\tau}(x,t) &= [u_t + \tfrac{1}{24}\,u_{ttt}\,\tau^2 + \dots] - (\theta-\tfrac12)\,[u_{xxt}\,\tau + \tfrac{1}{12}\,u_{xxxxt}\,h^2\,\tau + \dots] \\ &\quad -[u_{xx} + \tfrac{1}{12}\,u_{xxxx}\,h^2 + \tfrac{2}{6!}\,u_{xxxxxx}\,h^4 + \tfrac18\,u_{xxtt}\,\tau^2 + \dots]\,. \end{aligned}$$

Použitím (1) zjišťujeme, že obecně $\varepsilon_{h,\tau} = O(\tau+h^2)$, avšak pro $\theta = \frac12$ je $\varepsilon_{h,\tau} = O(\tau^2+h^2)$. Pro $\theta = \frac12$ je tedy schéma (31) druhého řádu přesnosti v prostoru i v čase a nazývá se schéma Crankovo–Nicolsonové. Jelikož je nepodmíněně stabilní, můžeme uvažovat $h = O(\tau)$. Pak $\varepsilon_{h,\tau} = O(\tau^2)$ a jsme tedy schopni dosáhnout dobrou přesnost při malé výpočetní náročnosti. Při volbě $h = O(\tau)$ však schéma Crankovo–Nicolsonové není disipativní, což způsobuje, že při nehladké počáteční podmínce může být méně přesné než plně implicitní schéma (18), které je disipativní řádu 2.

Metodu druhého řádu přesnosti v čase lze získat též pro

$$\theta = \frac12 - \frac{h^2}{12\,\tau}\,,\quad \text{tj.}\qquad \mu = \frac{1}{6\,(1-2\,\theta)}\,.$$

(Musí být $h^2 \le 6\,\tau$, aby bylo $\theta \ge 0$.) Při této volbě je dle (32) schéma (31) stabilní a platí $\varepsilon_{h,\tau} = O(\tau^2+h^4)$. Opět tedy můžeme používat velké časové kroky a metoda bude přitom pro hladké počáteční podmínky přesná a stabilní. Při volbě $h = O(\tau)$ však schéma opět není disipativní a pro malé h je blízké schématu Crankovu–Nicolsonové.

I když lze odvodit řadu dalších schémat pro řešení úlohy (1)–(3), nejpoužívanější je v praxi schéma (31). Nejlepší volba parametru θ však závisí na řešeném problému a často není jasné, které schéma je opravdu nejlepší.

Princip maxima a konvergence

Věta 4 *θ–schéma (31) s* $\theta \in [0,1]$ *a* $\mu\,(1-\theta) \le \frac{1}{2}$ *dává přibližné řešení* $\{U_j^n\}$ *splňující*

$$U_{\min}^n \le U_j^n \le U_{\max}^n\,,$$

kde

$$\begin{aligned} U_{\min}^n &= \min\{U_0^m,\ 0 \le m \le n\,;\ U_j^0,\ 0 \le j \le J\,;\ U_J^m,\ 0 \le m \le n\}\,,\\ U_{\max}^n &= \max\{U_0^m,\ 0 \le m \le n\,;\ U_j^0,\ 0 \le j \le J\,;\ U_J^m,\ 0 \le m \le n\}\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Schéma (31) zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} (33)\qquad &(1 + 2\,\theta\,\mu)\,U_j^{n+1}\\ &\quad= \theta\,\mu\,(U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)\,\mu\,(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) + [1 - 2\,(1-\theta)\,\mu]\,U_j^n\,. \end{aligned}$$

Koeficienty na pravé straně jsou nezáporné a jejich součet je $(1 + 2\,\theta\,\mu)$ (koeficienty před dvojčleny počítáme dvakrát). Předpokládejme, že U nabývá svého maxima ve vnitřním bodě a nechť toto maximum je U_j^{n+1}. Pak hodnoty U na pravé straně vztahu (33) jsou menší nebo rovny U_j^{n+1}, a jelikož součet koeficientů je $(1 + 2\,\theta\,\mu)$, musí být $U = U_j^{n+1}$ v každém z pěti sousedních uzlů v (33), pokud příslušný koeficient je nenulový. Je-li tedy $\theta \ne 0$, dostáváme $U_j^{n+1} = U_0^{n+1} = U_J^{n+1}$. Je-li $\theta = 0$, můžeme zkonstruovat posloupnost bodů, až dosáhneme hranice. Tedy $U_j^{n+1} = U_{\max}^n$. Stejným způsobem lze postupovat pro minimum. □

Věta 5 *Uvažujme posloupnost* $(h_i, \tau_i) \to (0,0)$ *pro* $i \to \infty$ *a nechť* $\mu_i\,(1-\theta) \le \frac{1}{2}$*. Nechť chyba diskretizace odpovídající schématu (31) konverguje k nule stejnoměrně v množině* $[0,1] \times [0,T]$*. Nechť chyby v okrajových a počátečních podmínkách rovněž konvergují stejnoměrně k nule pro* $i \to \infty$*. Pak aproximace dané schématem (31) konvergují stejnoměrně v* $[0,1] \times [0,T]$ *k řešení rovnice (1) s konzistentními okrajovými a počátečními podmínkami.*

Důkaz. Dle definice chyby diskretizace je pro $e_j^n = U_j^n - u(x_j, t_n)$

$$\begin{aligned} (34)\qquad (1 + 2\,\theta\,\mu)\,e_j^{n+1} &= \theta\,\mu\,(e_{j-1}^{n+1} + e_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)\,\mu\,(e_{j-1}^n + e_{j+1}^n)\\ &\quad + [1 - 2\,(1-\theta)\,\mu]\,e_j^n - \tau\,\varepsilon_j^{n+1/2}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, J-1,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejprve, že $e_j^0 = 0$, $j = 0, \ldots, J$, $e_0^n = e_J^n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ a označme

$$\|e^n\|_\infty = \max_{j=0,\ldots,J} |e_j^n|\,, \qquad \|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,J-1} |\varepsilon_j^{n+1/2}|\,.$$

Pak

$$(1 + 2\,\theta\,\mu)\,\|e^{n+1}\|_\infty \le 2\,\theta\,\mu\,\|e^{n+1}\|_\infty + \|e^n\|_\infty + \tau\,\|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty\,,$$

a tudíž $\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \tau\,\|\varepsilon^{n+1/2}\|_\infty$, z čehož plyne

$$\|e^n\|_\infty \leq \tau \sum_{m=0}^{n-1} \|\varepsilon^{m+1/2}\|_\infty \leq n\,\tau \max_{m=0,\dots,n-1} \|\varepsilon^{m+1/2}\|_\infty \to 0 \quad \text{pro} \quad i \to \infty\,.$$

Předpokládejme nyní, že chyby v okrajových a počátečních podmínkách jsou nenulové, tj.

$$e_j^0 = \eta_j^0\,, \quad j = 0,\dots,J\,, \qquad e_0^n = \eta_0^n\,,\;\; e_J^n = \eta_J^n\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,. \tag{35}$$

Pak $e_j^n = \bar{e}_j^n + \tilde{e}_j^n$, kde $\bar{e}_j^n$ splňuje (34) s homogenními počátečními a okrajovými podmínkami a $\tilde{e}_j^n$ splňuje (33) a (35). Pak $\|\bar{e}^n\|_\infty$ splňuje předchozí odhad a $\|\tilde{e}^n\|_\infty \leq \max\{|\eta_0^m|,\ 0 \leq m \leq n\,;\ \ |\eta_j^0|,\ 0 \leq j \leq J\,;\ \ |\eta_J^m|,\ 0 \leq m \leq n\}$ dle předchozí věty. □

Podmínka pro platnost principu maxima je mnohem více omezující než podmínka stability plynoucí z Fourierovy analýzy. Například pro $\theta = \frac{1}{2}$ dostáváme $\mu \leq 1$.

Princip maxima představuje alternativní prostředek pro získání podmínek stability. Oproti Fourierově analýze má tu výhodu, že ho lze snadno aplikovat i na úlohy s nekonstantními koeficienty. Avšak snadné je odvodit pouze postačující podmínky stability.