

Všimněme si, že pro schéma tvaru uvažovaného ve větě 2 se informace během jednoho časové kroku rozšíří o prostorový krok  $h$ . Numerická rychlost šíření informace je tudíž  $h/\tau$ . Uvedená nerovnost tedy říká, že numerická rychlost šíření musí být větší nebo rovna rychlosti šíření odpovídající uvažované parciální diferenciální rovnici. Pokud diferenční schéma nemůže šířit řešení alespoň tak rychle, jako se šíří řešení parciální diferenciální rovnice, nemůže řešení schématu konvergovat k řešení parciální diferenciální rovnice.

Na CFL podmínku se lze dívat též jako na nutnou podmínku stability diferenčního schématu. Obecně není pro stabilitu postačující, ale její velkou předností je její jednoduchost. Umožňuje tak vyřadit řadu diferenčních schémat s nepatrnou námahou věnovanou jejich vyšetřování. Teprve schémata, která splňují CFL podmínku je vhodné vyšetřovat podrobněji použitím kritérií, která jsou pro jejich stabilitu postačující.

Vrátíme-li se ke schématům (4)–(8), pak vidíme, že ve všech případech je nutno splnit podmínku  $|a\tau/h| \leq 1$ . To vysvětluje, proč schéma (8) vede pro úlohu ze cvičení 1 při  $h = 0.05$  a  $\tau = 0.08$  k oscilacím. Je též zřejmé, že schéma (4) nelze pro úlohu ze cvičení 1 použít, neboť oblast závislosti parciální diferenciální rovnice neleží v oblasti závislosti schématu. Oscilace lze pozorovat též v případě schématu (6) při splnění CFL podmínky. Vyšetřeme proto stabilitu tohoto schématu pomocí Fourierovy metody (tj. proved'eme von Neumannovu analýzu stability).

Rigorózní postup určení amplifikačního faktoru schématu (6) spočívá ve vyjádření přibližného řešení pomocí jeho Fourierovy transformace a využití ortonormality funkcí  $\{e^{i\xi j h}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Viděli jsme však, že formálně lze amplifikační faktor jednokrokového schématu získat nahrazením přibližného řešení síťovou funkcí  $\lambda(\xi)^n e^{i\xi j h}$ . Dosazením této funkce za  $U_j^n$  ve schématu (6) získáme

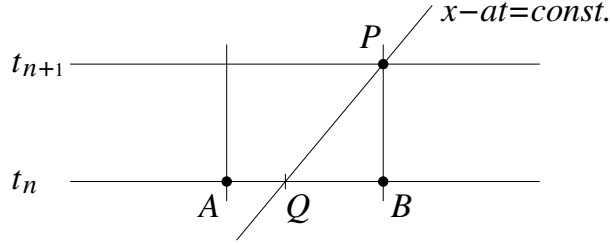
$$\lambda(\xi) = 1 + \frac{\nu}{2} (e^{-i\xi h} - e^{i\xi h}) = 1 - i\nu \sin(\xi h).$$

Pro libovolnou síť a každé  $\xi$ , pro které  $\sin(\xi h) \neq 0$ , je tedy  $|\lambda(\xi)| > 1$ . Pro každý proces zjemňování, při němž je  $\nu$  pevné, je proto schéma nestabilní. Vidíme tedy, že CFL podmínka skutečně není pro stabilitu postačující.

Jak jsme viděli, při  $a > 0$  lze k řešení rovnice (1) použít schéma (5). Bude-li  $a < 0$ , nelze toto schéma použít, neboť není splněna CFL podmínka, avšak můžeme použít schéma (4). To nás vede ke schématu

$$(9) \quad U_j^{n+1} = \begin{cases} (1 + \nu) U_j^n - \nu U_{j+1}^n, & \text{je-li } a < 0, \\ \nu U_{j-1}^n + (1 - \nu) U_j^n, & \text{je-li } a > 0. \end{cases}$$

Je-li  $a$  nekonstantní, pak  $a$  v (9) značí hodnotu  $a(x_j, t_n)$ . Všimněme si, že při  $a > 0$  se informace šíří ve směru kladné poloosy  $x$  (tj. zleva doprava) a k diskretizaci v prostorovém bodě  $x_j$  je využita informace v bodě  $x_j$  a vlevo od něj. Na druhou stranu při  $a < 0$  se informace šíří ve směru záporné poloosy  $x$  (tj. zprava doleva) a k diskretizaci v bodě  $x_j$  je použita informace v bodě  $x_j$  a vpravo od něj. Jedná se o tzv. *diskretizaci typu upwind*, kdy k diskretizaci v daném bodě využíváme informaci, která leží proti směru šíření (tj. která do daného bodu přichází).



Obr. 3: Odvození schématu (9) pomocí charakteristik.

Je-li  $|a\tau/h| \leq 1$ , splňuje schéma (9) CFL podmínku. Proved'me též von Neumannovu analýzu stability (při konstantním  $a$ ). Dosazením  $U_j^n := \lambda(\xi)^n e^{i\xi jh}$  do schématu (9) dostaneme

$$(10) \quad \lambda(\xi) = 1 - |\nu| + |\nu| \cos(\xi h) - i\nu \sin(\xi h),$$

z čehož plyne, že

$$(11) \quad |\lambda(\xi)|^2 = 1 - 4|\nu|(1 - |\nu|) \sin^2 \frac{\xi h}{2}.$$

Zjist'ujeme tedy, že  $|\lambda(\xi)| \leq 1$  pro všechna  $\xi \in \mathbb{R}$  právě tehdy, když  $|\nu| \leq 1$ . V tomto případě tedy dává CFL podmínka správné meze stability.

Ukažme si ještě jiný způsob odvození schématu (9). Pro jednoduchost uvažujme případ  $a > 0$  a necht'  $a\tau \leq h$ . Předpokládejme, že známe hodnoty  $U_A, U_B$  přibližného řešení v uzlech  $A, B$  a chceme určit hodnotu  $U_P$  přibližného řešení v uzlu  $P$ , viz obr. 3. Charakteristika procházející uzlem  $P$  protíná sít'ovou přímku  $t = t_n$  v bodě  $Q$  ležícím mezi body  $A$  a  $B$ . Řešení  $u$  rovnice (1) splňuje  $u(P) = u(Q)$  a je tedy přirozené definovat hodnotu  $U_P$  jako aproximaci  $u$  v bodě  $Q$  získanou pomocí hodnot  $U_A$  a  $U_B$ . Použijeme-li lineární interpolaci, dostaneme vztah

$$U_P = \frac{|BQ|}{|AB|} U_A + \frac{|AQ|}{|AB|} U_B.$$

To je přesně schéma (5), tj. schéma (9) pro  $a > 0$ , neboť  $|AB| = h$ ,  $|BQ| = a\tau = \nu h$  a  $|AQ| = |AB| - |BQ| = (1 - \nu)h$ .

## Fázová rychlost a disperze

Uvažujme úlohu (1), (2) s  $a = \text{const}$ . Definujme Fourierovu transformaci řešení  $u$  vztahem

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\hat{u}_t + i\xi a \hat{u} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

kde

$$\widehat{u}^0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^0(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Je tedy

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}^0(\xi) e^{-i\xi a t}$$

a platí

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}^0(\xi) e^{i\xi(x-at)} d\xi = u^0(x - at).$$

Z uvedeného plyne, že

$$(12) \quad \widehat{u}(\xi, t + \tau) = \widehat{u}(\xi, t) e^{-i\xi a \tau}.$$

Během jednoho časového kroku se tedy fáze Fourierovy transformace řešení úlohy (1), (2) změní o  $- \xi a \tau$ . Všimněme si též, že pro libovolné  $\xi \in \mathbb{R}$  je  $|\widehat{u}(\xi, t)| = |\widehat{u}^0(\xi)|$ , tj. amplituda libovolného Fourierova členu je v čase konstantní.

V diskrétním případě je

$$U_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{U}^n(\xi) e^{i\xi j h} d\xi, \quad \text{kde} \quad \widehat{U}^n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h U_j^n e^{-i\xi j h}.$$

Všimněme si, že interval  $[-\pi/h, \pi/h]$  obsahuje všechny frekvence, které lze na síti s krokem  $h$  reprezentovat, neboť pro libovolné  $k \in \mathbb{Z}$  je

$$e^{i(\xi + \frac{2\pi}{h} k) j h} = e^{i\xi j h} e^{i2\pi k j} = e^{i\xi j h}.$$

Pro libovolné jednokrokové diferenční schéma platí  $\widehat{U}^{n+1}(\xi) = \lambda(\xi) \widehat{U}^n(\xi)$ . Vzhledem ke vztahu (12) je tedy žádoucí, aby  $\lambda(\xi)$  byla dobrá aproximace  $e^{-i\xi a \tau}$ . Abychom tato dvě čísla mohli lépe porovnat, zapíšeme amplifikační faktor ve tvaru  $\lambda(\xi) = |\lambda(\xi)| e^{-i\xi \alpha(\xi) \tau}$ . Hodnota  $|\lambda(\xi)|$  vyjadřuje pokles amplitudy složky přibližného řešení o frekvenci  $\xi$  během jednoho časového kroku. Jelikož, jak jsme viděli, pro přesné řešení libovolný Fourierův člen není tlumený, požadujeme, aby  $|\lambda(\xi)|$  bylo blízké hodnotě 1. Veličina  $\alpha(\xi)$  se nazývá *fázová rychlost*. Je to rychlost, kterou diferenční schéma šíří vlny o frekvenci  $\xi$ . Pokud by bylo  $\alpha(\xi) = a$  pro všechna  $\xi$ , pak by se vlny šířily správnou rychlostí, avšak s tím se obecně nesetkáme u žádného z diferenčních schémat. Rychlost  $\alpha(\xi)$  je pouze aproximací  $a$  a je obecně různá pro různé hodnoty  $\xi$ , což se projevuje deformací tvaru řešení diferenčního schématu. Jev, kdy se vlny o různých frekvencích pohybují různými rychlostmi, se nazývá *disperze*. Rozdíl  $a - \alpha(\xi)$  se nazývá *fázová chyba*.

Fázovou rychlost můžeme určit ze vztahu

$$\tan(\xi \alpha(\xi) \tau) = -\frac{\text{Im } \lambda(\xi)}{\text{Re } \lambda(\xi)}.$$

Je-li  $|\lambda(\xi)| = 1$ , platí  $\sin(\xi \alpha(\xi) \tau) = -\text{Im } \lambda(\xi)$ . Fázovou chybu je vhodné vyšetřovat zejména pro malé hodnoty  $\xi h$ , neboť vlny s takovými frekvencemi lze na síti s krokem

$h$  dobře aproximovat. Přitom můžeme využít následující vztahy pro počítání s malými čísly:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2), \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$

$$\tan x = x \left(1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right), \quad \tan^{-1} y = y \left(1 - \frac{y^2}{3} + O(y^4)\right).$$

**Příklad 1** Vyšetřeme fázovou chybu pro schéma (9).

**Řešení:** Podle (10) a výše uvedených vztahů je

$$\begin{aligned} \tan(\xi \alpha(\xi) \tau) &= \frac{\nu \sin(\xi h)}{1 - |\nu| + |\nu| \cos(\xi h)} = \frac{\nu \xi h \left(1 - \frac{(\xi h)^2}{6} + O((\xi h)^4)\right)}{1 - |\nu| \frac{(\xi h)^2}{2} + O((\xi h)^4)} \\ &= \nu \xi h \left[1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{|\nu|}{2}\right) (\xi h)^2 + O((\xi h)^4)\right], \end{aligned}$$

z čehož plyne (je  $\nu \xi h = \xi a \tau$ )

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= a \left[1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{|\nu|}{2}\right) (\xi h)^2 + O((\xi h)^4)\right] \left(1 - \frac{\nu^2}{3} (\xi h)^2 + O((\xi h)^4)\right) \\ &= a \left[1 - \frac{1}{6} (1 - |\nu|) (1 - 2|\nu|) (\xi h)^2 + O((\xi h)^4)\right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že fázová chyba je řádu  $(\xi h)^2$  a znaménko závisí na  $\nu$ . Pro  $|\nu| \in (\frac{1}{2}, 1)$  dochází k předbíhání a pro  $|\nu| \in (0, \frac{1}{2})$  ke zpoždování fáze. Pro  $|\nu| = \frac{1}{2}$  je chyba fáze nulová (v tomto případě je  $\lambda(\xi) = \cos(\frac{\xi h}{2}) e^{-i\xi a \tau}$ ). Pro  $|\nu| = 1$  je  $\lambda(\xi) = e^{-i\xi a \tau}$ , a schéma tudíž dává přesné řešení.

Ze vztahu (11) vidíme, že kromě případu  $|\nu| = 1$  dochází u upwind schématu (9) vždy k chybě v amplitudě řádu  $(\xi h)^2$  v jednom časovém kroku, což vede ke globální chybě řádu  $\xi h$  (na daném časovém intervalu  $[0, T]$ ). Pro většinu problémů je takovéto tlumení nepřijatelné.

V případě Laxova–Friedrichsova schématu (8) je

$$\lambda(\xi) = \cos(\xi h) - i\nu \sin(\xi h), \quad |\lambda(\xi)|^2 = 1 - (1 - \nu^2) \sin^2(\xi h).$$

Schéma je tedy stabilní pro  $|\nu| \leq 1$ , tj. opět pro ty hodnoty  $\nu$ , pro něž je splněna CFL podmínka. Tlumení je stejného řádu jako u schématu (9), avšak pokles amplitudy je více než dvojnásobný (v jednom časovém kroku zhruba  $(1 + |\nu|)(1 - |\nu|)(\xi h)^2$  namísto  $|\nu|(1 - |\nu|)(\xi h)^2$  u schématu (9)). Analogicky jako výše dostaneme

$$\alpha(\xi) = a \left[1 + \frac{1}{3} (1 - \nu^2) (\xi h)^2 + O((\xi h)^4)\right].$$

Kromě případu  $|\nu| = 1$ , kdy Laxovo–Friedrichsovo schéma dává stejně jako schéma (9) přesné řešení, dochází tedy vždy k předbíhání fáze.

## Chyba diskretizace

Chyba diskretizace je chyba, které se dopouštíme, když derivace v diferenciální rovnici nahradíme diferenčními kvocienty. Získáme ji dosazením přesného řešení do numerického schématu ve tvaru odpovídajícím nahrazení derivací diferenčními kvocienty a odečtením pravé strany od levé.

Jako příklad uvažujme schéma (4) pro numerické řešení rovnice (1). Pro definici chyby diskretizace použijeme tvar schématu s diferenčními uvedený v (4) vlevo, nikoli ekvivalentní tvar  $U_j^{n+1} = (1 + \nu) U_j^n - \nu U_{j+1}^n$ , který je vhodný pro provedení von Neumannovy analýzy. Chyba diskretizace je pak dána vztahem

$$\varepsilon_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h},$$

kde  $u_j^n = u(x_j, t_n)$ . Tento vztah můžeme též psát ve tvaru

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta_{+t} u_j^n}{\tau} + a \frac{\Delta_{+x} u_j^n}{h}.$$

Můžeme take zavést chybu diskretizace  $\varepsilon_{h,\tau}(x, t)$ , která je definována v každém bodě  $(x, t)$  výpočetní oblasti, pro něž  $(x + h, t)$  a  $(x, t + \tau)$  též leží ve výpočetní oblasti, vztahem

$$\varepsilon_{h,\tau} = \frac{\Delta_{+t} u}{\tau} + a \frac{\Delta_{+x} u}{h}.$$

Zřejmě  $\varepsilon_j^n = \varepsilon_{h,\tau}(x_j, t_n)$ . Je-li  $u$  dvakrát spojitě derivovatelné, pak použitím Taylorova vzorce získáme

$$(13) \quad \varepsilon_{h,\tau}(x, t) = \frac{1}{2} u_{tt}(x, \eta) \tau + \frac{a}{2} u_{xx}(\xi, t) h,$$

kde  $\xi \in (x, x + h)$  a  $\eta \in (t, t + \tau)$ . Říkáme, že schéma je prvního řádu přesnosti v prostoru i v čase.

U každého schématu je základním požadavkem, aby chyba diskretizace konvergovala k nule pro  $h, \tau \rightarrow 0$ . Pak říkáme, že schéma je konsistentní s řešenou diferenciální rovnicí.

## Chyba aproximace

Chyba aproximace je definována vztahem  $e_j^n = U_j^n - u_j^n$ , kde  $U_j^n$  je přibližné řešení a  $u_j^n$  je aproximované přesné řešení v uzlu  $(x_j, t_n)$ .

Všimněme si, že chyba aproximace je řešením příslušného schématu s pravou stranou nahrazenou  $-\varepsilon_j^n$  nebo násobkem této hodnoty (v závislosti na použitém tvaru schématu). Např. v případě schématu (4) máme

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\tau} + a \frac{e_{j+1}^n - e_j^n}{h} = -\varepsilon_j^n,$$

resp.

$$(14) \quad e_j^{n+1} = (1 + \nu) e_j^n - \nu e_{j+1}^n - \tau \varepsilon_j^n.$$