Ze vztahu (32) plyne

$$\widehat{U}^n(\xi) = \widehat{U}^0(\xi)\,\lambda_+(\xi)^n + \gamma(\xi)\,\frac{\lambda_+(\xi)^n - \lambda_-(\xi)^n}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\,,$$

kde $\gamma(\xi) = \widehat{U}^1(\xi) - \widehat{U}^0(\xi)\,\lambda_+(\xi)$. Použijeme-li k inicializaci schéma (6), je $\widehat{U}^1(\xi) = (1 - \mathrm{i}\,\nu\,\sin(\xi\,h))\,\widehat{U}^0(\xi)$. Použitím vztahu $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\,x + O(x^2)$ získáme

$$\lambda_\pm(\xi) = -\mathrm{i}\,\nu\,\sin(\xi\,h) \pm 1 \mp \frac{1}{2}\,\nu^2\,\sin^2(\xi\,h) + O((\xi\,h)^4)\,,$$

a tudíž

$$\gamma(\xi) = (1 - \mathrm{i}\,\nu\,\sin(\xi\,h) - \lambda_+(\xi))\,\widehat{U}^0(\xi) = \left(\frac{\nu^2}{2}\,\sin^2(\xi\,h) + O((\xi\,h)^4)\right)\widehat{U}^0(\xi)\,.$$

Vidíme, že pro malé hodnoty $|\xi\,h|$ je $\gamma(\xi)$ malé, a schéma se tudíž chová jako jednokrokové schéma s amplifikačním faktorem λ_+. Pro větší hodnoty $|\xi\,h|$ velikost $\gamma(\xi)$ být malá nemusí. Část řešení příslušná λ_- se nazývá parazitická složka řešení. Jelikož $\lambda_-(0) = -1$, tato složka řešení v průběhu času rychle osciluje. Později ukážeme, že se parazitická složka řešení pohybuje špatným směrem (pro $a > 0$ se pohybuje zprava doleva).

Cvičení 4 *Uvažujte ve cvičení 1 okrajovou podmínku $U_J^n = 0$, která není konzistentní s řešenou rovnicí, a proveďte výpočet pro leapfrog scheme. Měli byste pozorovat, že v důsledku zmíněné okrajové podmínky vznikne v bodě $x = 3$ parazitická složka řešení, která je silně oscilující a pohybuje se zprava doleva. Okrajová podmínka v bodě $x = -2$ přemění parazitickou složku na neparazitickou.*

Parazitická složka řešení se objeví při každém výpočtu s vícekrokovými schématy. Obvykle nezpůsobuje podstatné potíže, avšak v některých případech je ji potřeba redukovat nebo odstranit. Vliv parazitických složek lze redukovat pomocí disipace.

Definice 1 *Schéma je disipativní řádu $2\,r$, jestliže amplifikační faktory splňují podmínku*

$$|\lambda_j(\xi)| \le 1 - C\left(\sin\frac{\xi\,h}{2}\right)^{2\,r} \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\,,$$

kde C je kladná konstanta nezávislá na h a τ.

Pro leapfrog scheme a schéma Crankovo–Nicolsonové je velikost amplifikačních faktorů rovna 1 pro všechny frekvence. Říkáme, že tato schémata jsou *ostře nedisipativní*. Pro Laxovo–Friedrichsovo schéma je $|\lambda(\pi/h)| = 1$, avšak $|\lambda(\xi)| < 1$ pro $0 < |\xi| < \pi/h$ a $|\nu| < 1$. Toto schéma je proto nedisipativní, ale ne ostře. Redukuje amplitudu u většiny frekvencí, nikoli však u nejvyšší frekvence na síti.

Všimněme si, že síťová funkce $U_j^n = (-1)^{n+j}\,\eta$ je pro libovolné $\eta \in \mathbb{R}$ řešením leapfrog scheme. Vidíme tedy, že počáteční poruchy se šíří, aniž by byly tlumeny. O přítomnosti této šachovnicové složky řešení rozhodují pouze počáteční a okrajové podmínky.

Vlastnosti nedisipativního schématu lze zlepšit přidáním disipace. Je však třeba dát pozor, abychom tím nezhoršili řád přesnosti schématu. Např. leapfrog scheme lze modifikovat takto:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\,\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\,h} + \frac{\varepsilon}{2\,\tau}\left(\frac{1}{2}\,\delta_x\right)^4 U_j^{n-1} = 0\,,$$

kde ε je vhodná kladná konstanta. Jelikož $\delta_x^4\,u = O(h^4)$, schéma je nadále druhého řádu přesnosti, pokud $\tau \geq C\,h^2$. Tato podmínka nepředstavuje žádné podstatné omezení, neboť časový krok volíme obvykle srovnatelný s prostorovým krokem. Místo soustavy diferenčních rovnic (31), získáme nyní

$$\widehat{U}^{n+1}(\xi) + \mathrm{i}\,2\,\nu\,\sin(\xi\,h)\,\widehat{U}^n(\xi) - \left(1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}\right)\widehat{U}^{n-1}(\xi) = 0\,.$$

Kořeny odpovídající charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_\pm(\xi) = -\mathrm{i}\,\nu\,\sin(\xi\,h) \pm \sqrt{1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} - \nu^2\,\sin^2(\xi\,h)}\,.$$

Je-li

$$\nu^2\,\sin^2(\xi\,h) + \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} \leq 1\,, \tag{33}$$

je

$$|\lambda_\pm(\xi)| = \sqrt{1 - \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2}\,,$$

a schéma je tedy stabilní a disipativní řádu 4 (k tomu je opět nutné, aby $|\nu| < 1$). Podmínku (33) můžeme přepsat do tvaru

$$4\,\nu^2\,\sin^2\frac{\xi\,h}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\xi\,h}{2}\right) + \varepsilon\,\sin^4\frac{\xi\,h}{2} \leq 1\,.$$

Stačí tedy nalézt takové hodnoty ε, že

$$4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 \leq 1 \qquad \forall\ s \in [0,1]\,.$$

Je-li $\nu^2 \in (0, \frac{1}{2}]$, můžeme volit $\varepsilon \in (0,1]$, neboť pak $4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 \leq 2\,s\,(1-s) + s^2 = s\,(2-s) \leq 1$. Je-li $\nu^2 \in [\frac{1}{2}, 1)$, volíme $\varepsilon \in (0, 4\,\nu^2\,(1-\nu^2)]$. Pak $4\,\nu^2\,s\,(1-s) + \varepsilon\,s^2 \leq 4\,\nu^2\,s\,(1-\nu^2\,s) \leq 1$.

Podobně jako výše můžeme modifikovat i metodu Crankovu–Nicolsonové pro řešení rovnice (28). Obdržíme schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4\,h} + \frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{1}{2}\,\delta_x\right)^4 U_j^n = \frac{f_j^{n+1} + f_j^n}{2}\,,$$

které je druhého řádu přesnosti (pokud $\tau \geq C\,h^2$) a disipativní řádu 4 pro malé hodnoty ε.

Cvičení 5 *Zopakujte výpočet ze cvičení 4 pro leapfrog scheme s disipací (v prostorových uzlech x_1 a x_{J-1} uvažujte leapfrog scheme bez disipace).*

Pro vícekroková schémata vždy existuje právě jeden amplifikační faktor $\lambda_0(\xi)$ takový, že $\lambda_0(0) = 1$. Tento amplifikační faktor použijeme k definici fázové rychlosti. Pro leapfrog scheme je to amplifikační faktor λ_+. Platí

$$\sin(\xi\,\alpha(\xi)\,\tau) = \nu\,\sin(\xi\,h) = \nu\,\xi\,h\left(1 - \frac{(\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right),$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= a\left(1 - \frac{(\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right)\left(1 + \frac{(\nu\,\xi\,h)^2}{6} + O((\xi\,h)^4)\right)\\ &= a\left(1 - \frac{1}{6}\,(1-\nu^2)\,(\xi\,h)^2 + O((\xi\,h)^4)\right).\end{aligned}$$

Získali jsme tedy totéž jako pro Laxovo-Wendroffovo schéma a rovněž platí $\alpha(\pi/h) = 0$.

Pro parazitickou složku řešení leapfrog scheme odpovídající λ_- zavedeme fázovou rychlost vztahem $\lambda_-(\xi) = -|\lambda_-(\xi)|\,e^{-\mathrm{i}\,\xi\,\alpha_-(\xi)\,\tau}$, neboť $\lambda_-(0) = -1$. Pak $\sin(\xi\,\alpha_-(\xi)\,\tau) = -\nu\,\sin(\xi\,h)$, a tudíž $\alpha_-(\xi) = -\alpha(\xi)$. Parazitická složka řešení se tedy pohybuje opačným směrem než je správný směr řešení. Navíc platí $\alpha_-(\pi/h) = 0$, a tudíž nejvyšší frekvence, které neobsahují přesnou informaci, se nešíří pryč.

Volba parametru ν

Vlastnosti schémat vyšetřovaných v předchozích odstavcích závisí na volbě parametru ν, tj. na poměru prostorového a časového kroku. V řadě případů jsme viděli, že pro $|\nu| = 1$ schémata dávají přesné řešení, což je ovšem dáno jednoduchostí uvažované modelové úlohy. Pro úlohy s nekonstantními koeficienty nebo komplikovanější problémy k tomu již nedochází. Nicméně naše teoretické úvahy ukazují, že je obecně vhodné volit $|\nu|$ blízko hranice stability, neboť tím dosáhneme malé disipace i disperze. Zajímá-li nás pouze určitá frekvence ξ_0, měli bychom volit h tak, aby $|\xi_0\,h| \ll \pi$ a vlna o frekvenci ξ_0 mohla být tudíž na použité síti dobře aproximována.