

Numerické řešení transportní rovnice

V této části se budeme zabývat numerickým řešením Cauchyovy úlohy pro transportní rovnici v jedné prostorové dimenzi, tj. úlohy

$$(1) \quad u_t + a u_x = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pro neznámou funkci $u = u(x, t)$ závisující na prostorové proměnné $x \in \mathbb{R}$ a časové proměnné $t \in \mathbb{R}_0^+$. Funkce u^0 je daná počáteční podmínka a koeficient a je rychlost šíření veličiny u . Náš hlavní zájem bude patřit rovnici (1) s konstantním koeficientem a , avšak v některých případech budeme uvažovat též rovnici (1) s nenulovou pravou stranou či s nekonstantním koeficientem a .

Jak víme, úloha (1), (2) má pro $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ a konstantní a právě jedno klasické řešení, které je dáno vztahem

$$(3) \quad u(x, t) = u^0(x - at).$$

Vyvstává tedy otázka, proč se zabývat numerickým řešením úlohy (1), (2), když její řešení je známo. Důvodem je to, že u komplikovanějších úloh, v nichž hrají důležitou roli transportní mechanismy, již řešení zpravidla nejsme schopni v analytickém tvaru získat a musíme ho aproximovat pomocí numerických metod. Přitom navržení vhodné metody není vůbec triviální a řada potíží, s nimiž se setkáváme, se vyskytuje již při numerickém řešení rovnice (1). Abychom příslušné jevy lépe pochopili, je rozumné je studovat na co nejjednodušší úloze, a proto uvažujeme rovnici (1). U metod, které se ukáží jako nevhodné pro řešení rovnice (1), nelze samozřejmě očekávat, že by dávaly dobré výsledky pro komplikovanější úlohy.

Opět budeme uvažovat rovnoměrnou síť s konstantním prostorovým krokem h a konstantním časovým krokem τ a definujeme uzly sítě (x_j, t_n) , kde $x_j = jh$, $t_n = n\tau$, $j \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Řešení u Cauchyovy úlohy (1), (2) opět aproximujeme v uzlech (x_j, t_n) hodnotami U_j^n . Rovnici (1) aproximujeme v libovolném uzlu (x_j, t_n) diferenčním schématem získaným nahrazením parciálních derivací diferenčními kvocienty. Takto lze získat mnoho rozličných numerických schémat, z nichž několik nyní uvedeme. Pro jejich přehlednější zápis budeme užívat parametr $\nu = a\tau/h$, který jsme zavedli již v části věnované von Neumannově analýze stability.

Pro numerické řešení rovnice (1) lze uvažovat například schémata:

$$(4) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = (1 + \nu) U_j^n - \nu U_{j+1}^n,$$

$$(5) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = \nu U_{j-1}^n + (1 - \nu) U_j^n,$$

$$(6) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = \frac{\nu}{2} U_{j-1}^n + U_j^n - \frac{\nu}{2} U_{j+1}^n,$$

$$(7) \quad \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.} \quad U_j^{n+1} = U_j^{n-1} + \nu U_{j-1}^n - \nu U_{j+1}^n,$$

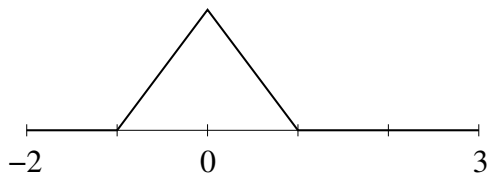
$$(8) \quad \frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{tj.}$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \nu)U_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)U_{j+1}^n.$$

Všechna uvedená schémata jsou explicitní. Schéma (7) je známo pod označením *leapfrog scheme*. K určení přibližného řešení na nové časové vrstvě využívá toto schéma hodnot přibližného řešení z předcházejících dvou časových vrstev. Hovoříme proto o *dvoukrokovém* schématu. Ostatní schémata jsou jednokroková. Schéma (8) se nazývá Laxovo-Friedrichsovo schéma. Všimněme si, že

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}.$$

Jelikož diferenční kvocient $(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)/h^2$ reprezentuje aproximaci $u_{xx}(x_j, t_n)$, lze tedy speciální aproximaci časové derivace použitou v (8) interpretovat jako přidání umělé difúze o velikosti $h^2/(2\tau)$ ke schématu (6).

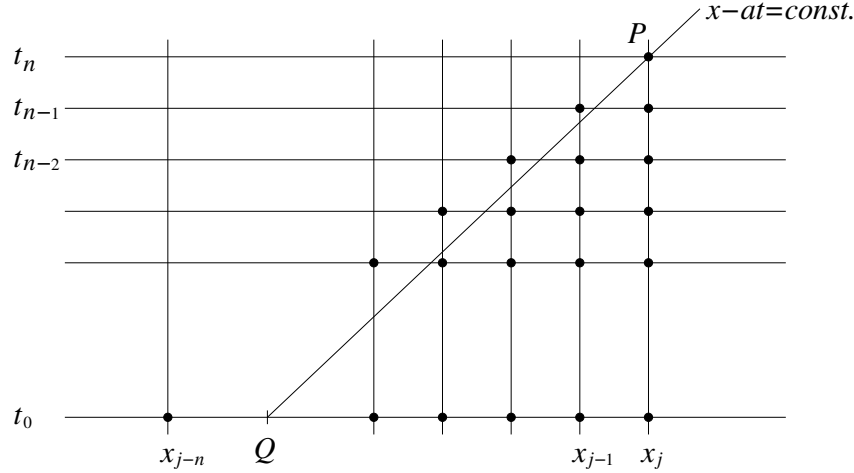


Obr. 1: Počáteční podmínka u^0 použitá ve cvičení 1.

Cvičení 1 Uvažujme rovnici $u_t + u_x = 0$ v oblasti $(-2, 3) \times \mathbb{R}^+$ s počáteční podmínkou u^0 znázorněnou v obr. 1. Definujme ekvidistantní prostorové uzly $-2 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 3$ s prostorovým krokem $h = 5/J$. Dále uvažujme konstantní časový krok $\tau > 0$ a časové hladiny $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{N}_0$. V čase t_0 je přibližné řešení určeno počáteční podmínkou. Na následujících časových hladinách pak můžeme hodnoty přibližného řešení ve vnitřních uzlech určit pomocí libovolného z výše uvedených schémat, přičemž položíme $U_0^n = 0$ a $U_J^n = U_{J-1}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ (pro $n = 1$ však nelze použít schéma (7)). Naprogramujte výše uvedená schémata a proveďte výpočty pro $J = 50$ a $\tau = 0.08$. U Laxova-Friedrichsova schématu otestujte, jaký vliv má zmenšení h na polovinu při nezměněném τ , zmenšení τ na polovinu při nezměněném h a současné zmenšení h i τ na polovinu, popř. na čtvrtinu.

Provedeme-li výpočty popsané ve cvičení 1, zjistíme, že v přibližných řešeních schémat (4) a (6) se již po několika málo časových krocích objeví velké oscilace a dostaneme zcela nepoužitelné výsledky. Na druhou stranu zbývající tři schémata vedou při $J = 50$ a $\tau = 0.08$ k přijatelným aproximacím řešení uvažované úlohy. Změníme-li však J či τ , objeví se v některých případech nestabilní chování i u těchto schémat. Naším cílem nyní bude vysvětlit, proč k uvedeným jevům dochází.

Zvolme bod $P \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ a uvažujme schéma (5) a takovou síť, že bod P je její uzel. Necht' např. $P = (x_j, t_n)$. Pak hodnota U_j^n je určena hodnotami U_{j-1}^{n-1} a U_j^{n-1} .



Obr. 2: Oblast závislosti PDR a schématu (5).

Podobně tyto dvě hodnoty jsou určeny hodnotami U_{j-2}^{n-2} , U_{j-1}^{n-2} a U_j^{n-2} , viz obr. 2. Z toho plyne, že hodnota U_j^n závisí pouze na hodnotách počáteční podmínky u^0 v bodech $x_{j-n}, x_{j-n+1}, \dots, x_{j-1}, x_j$. Pokud bychom uvažovali v rovnici (1) nenulovou pravou stranu f , závisela by hodnota U_j^n též na hodnotách f v uzlech sítě ležících v trojúhelníku s vrcholy (x_j, t_n) , $(x_{j-n}, 0)$ a $(x_j, 0)$. Tento trojúhelník se nazývá *oblast závislosti* schématu v uzlu (x_j, t_n) .

Pro řešení u úlohy (1), (2) podle vztahu (3) je $u(P) = u^0(Q)$, kde Q je průsečík přímky $t = 0$ a charakteristiky $x - at = const.$ procházející bodem P , viz obr. 2. V případě rovnice (1) s nenulovou pravou stranou f závisí hodnota $u(P)$ též na hodnotách funkce f v bodech úsečky PQ . Úsečka PQ je *oblastí závislosti* uvažované parciální diferenciální rovnice v bodě P . Nyní můžeme zformulovat následující podmínku.

Věta 1 (CFL podmínka; Courant, Friedrichs, Lewy (1928)) *Nutná podmínka konvergence diferenčního schématu je, aby oblast závislosti parciální diferenciální rovnice ležela uvnitř oblasti závislosti diferenčního schématu.*

Pro schéma (5) je CFL podmínka splněna, leží-li bod Q na přímce $t = 0$ mezi body x_{j-n} a x_j . To je právě tehdy, když $a \geq 0$ a $a\tau \leq h$. Uvažujme posloupnost sítí s $\tau/h = const.$ a $h \rightarrow 0$ a necht' P je uzlem všech těchto sítí. Pak oblast závislosti schématu (5) v uzlu P je pro všechny tyto sítě stejná. Pokud $a < 0$ nebo $a\tau > h$, pak pro všechny tyto sítě hodnota přibližného řešení U v uzlu P nezávisí na hodnotách počáteční podmínky u^0 v pevně daném okolí bodu Q (neměnném při $h \rightarrow 0$). Přibližná řešení v uzlu P tudíž obecně nemohou konvergovat k hodnotě $u(P)$. Z uvedeného je zřejmé, že platí též následující věta.

Věta 2 *Nutnou podmínkou konvergence explicitního schématu typu $U_j^{n+1} = \alpha U_{j-1}^n + \beta U_j^n + \gamma U_{j+1}^n$ pro rovnici (1) při $\tau/h = const.$ je, aby platilo $|a\tau/h| \leq 1$.*

Nerovnost $|a\tau/h| \leq 1$ z věty 2 se také často nazývá CFL podmínka.