7| **Věta Cauchyova-Kowalevské** [11:73]

Uvažujme kvazilineární systém

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + b = 0 \quad v\ \mathbb{R}^n \tag{*}$$

s kompatibilními Cauchyovými daty ($D^\beta u$ pro $|\beta| \le m-1$) předepsanými na ploše S dané rcí

$$\phi(x) = 0 .$$

Buď $x^0 \in S$ a nechť S není charakteristická v $\underline{x^0}$, tj. $Q(D\phi)(x_0) \neq 0$. Nechť ϕ je reálně analytická v bodě $\underline{x_0}$, Cauchyova data jsou reálně anal. v x_0 (tj. lokálně reprezentovatelná mocninnými řadami v $x_1 - x_1^0, \dots, x_{n-1} - x_{n-1}^0$), A_α, b jsou reálné anal. fce svých argumentů x, $D^\beta u$ v bodě x^0, $D^\beta u^0$, kde $D^\beta u^0$ je hodnota odpovídající Cauchyovým datům v x^0. Pak uvedená Cauchyova úloha má řešení (v okolí bodu x^0), které je reálně analytické v bodě x^0 a toto řešení je v třídě reálných analytických fcí jednoznačné.

Důkaz spočívá v tom, že se ukáže, že všechny koeficienty v rozvoji řešení $\underline{u}$ do mocninné řady v $(x-x^0)$ lze získat jednoznačným způsobem postupným diferencováním z diferenciální rce a Cauchyových dat. Pak se dokáže, že výsledná řada skutečně konverguje k řešení. Přitom se využívá metody majorant. Před konstruováním mocninných řad se ještě PDR převede na systém 1. řádu a plocha S se v okolí bodu x^0 narovná (tj. její rce je $x_n = 0$) – to jsme již dělali při odvození podmínky charakterističnosti plochy S.

Ukažme si ještě převod ~~problému~~ (*) na systém 1. řádu. Pro jednoduchost se omezme na $N=1$, tj. u je (kvazi)skalární fce, a předp., že S je rovina $x_n = 0$. Jelikož S není char. v bodě x^0, je koeficient u $\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}$ v okolí bodu x^0 nenulový. Rovnici (*) můžeme tedy zapsat ve tvaru

nechat

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha \neq (0,\dots,0,m)}} \tilde{A}_\alpha(x, \{D^\beta u\}_{|\beta| \le m-1}) D^\alpha u + \tilde{b}(x, \{D^\beta u\}_{|\beta| \le m-1}). \tag{**}$$

Zavedeme nové neznámé fce $v = \{D^\beta u\}_{|\beta| \le m-1}$. Derivace D^α s $|\alpha| = m$ lze zapsat jako $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$ a $|\beta| = m-1$ (obecně je to nejednoznačné). Každému $\underline{\alpha}$ (s $|\alpha|=m$) přiřadíme prostě pevně zvolenou dvojici i, β (např. tak, že při $\alpha_1 > 0$ přiřadíme 1 a $\alpha - (1,0,\dots,0)$, při $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0$ přiřadíme 2 a $\alpha - (0,1,0,\dots,0)$, při $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 > 0$ přiřadíme 3 a $\alpha - (0,0,1,0,\dots,0)$ atd.) Pak položíme $\tilde{A}_{i,\beta} = \tilde{A}_\alpha$ a $\tilde{A}_{i,\beta} = 0$ pro ty kombinace i, β, které neodpovídá žádné $\underline{\alpha}$. Rce (**) pak přejde na

$$\alpha^* = (0,\dots,0,m-1)$$

$$\frac{\partial v_{\alpha^*}}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{|\beta|=m-1} \tilde{A}_{i,\beta}(x, v) \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} + \tilde{C}(x, v),$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_n} = v_\gamma \quad [illegible]\ |\alpha| \le m-2, \qquad \gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_n + 1)$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_j} \qquad \gamma \neq \alpha, \qquad |\alpha| = m-1,\ \alpha \neq \alpha^* .$$

nalezneme podmínky

Problém lze tedy zapsat v maticovém tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x, v) \frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x, v),$$

kde $\underline{a_i}$ jsou čtvercové matice a $\underline{b}$ je vektor. Vidíme, že problémy 1. řádu jsou obecnější než problémy vyššího řádu, neboť každý problém vyššího řádu lze převést na problém 1. řádu.

8| Věta Cauchyova-Kowalevské – poznámky [11:76]

- věta nezaručuje globální existenci řešení (pouze lokální existence, v malém okolí plochy S)
- nevylučuje, že pro daný Cauchyův problém existují neanalytická řešení;
- nevylučuje, že řešení, které je analytické v blízkosti plochy S, v jisté vzdálenosti od ní již analytické není;
- pokud dovolíme, aby data patřila do C^s či C^∞ místo C^ω, podobná obecná věta není platná;
- řada fyzikálních problémů vede na analytické PDR, avšak omezení se na analytická Cauchyova data a řešení je nerealistické. Řešení je pak totiž určeno globálně lokálními podmínkami v blízkosti jednoho bodu chováním. Reálná anal. řešení jsou však užitečná pro diskutování obecnějších řešení. ~~Analytické~~ eliptické rce mají navíc tu vlastnost, že jejich řešení jsou analytická ve vnitřku jejich definičního oboru.

Pozn. Uvažujme lineární systém m-tého řádu

$$(*)\qquad Lu = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0 \quad \text{v } \Sigma,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^N$ a matice koeficientů jsou reálné analytické v Σ. Nechť plocha $S=\{x_n=0\}$, na níž ~~zadáváme~~ Cauchyova data, ~~je reálná analytická a~~ není charakteristická. Dále předp., že množinu Σ lze pokrýt tzv. analytickým polem, což je soustava analytických ploch. Předpokládáme, že tyto plochy nejsou charakteristické vzhledem k operátoru L. Označme $R = \{x \in \Sigma;\ x_n \ge 0\}$ a nechť $u \in C^m(R)$ je řešením rce (*) s nulovými Cauchyovými daty na S (tj. $u \in C^m(\operatorname{int} R)$, $D^\alpha u$, $|\alpha| \le m$ lze spojitě rozšířit na celé R a rozšířené hodnoty splňují $D^\alpha u = 0$ na S pro $|\alpha| \le m-1$).
Pak $u=0$ v R (Holmgrenova věta o jednoznačnosti).

Aplikací analytických deformací lze získat větu pro křivé plochy S.

Holmgrenova věta o jednoznačnosti [11: 80]

Věta Cauchyova-Kowalevské zaručuje, že analytický Cauchyův problém s daty předepsanými na analytické necharakteristické ploše S má nejvýše jedno analytické řešení $\underline{u}$, neboť koeficienty mocninné řady pro $\underline{u}$ jsou určeny jednoznačně. Nevylučuje však, že existují jiná neanalytická řešení. Jednoznačnost lze však dokázat v případě lineárních rovnic s analytickými koeficienty.

Jelikož věta Cauchyova-Kowalevské zaručuje existenci pouze v malém okolí plochy S, pokryjeme celou množinu, na níž danou rovnici řešíme, systémem analytických ploch S_λ, $\lambda \in \Lambda \equiv (a,b)$ v $\mathbb{R}^n$, který nazveme <u>analytickým polem</u>. Přesně předpokládáme, že S_λ lze bianalyticky transformovat do průřezů válce, jehož základna je otevřená jednotková koule K v $\mathbb{R}^{n-1}$. Existuje tedy prosté analytické zobrazení $F: K\times\Lambda \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$S_\lambda = \{x;\ \ x=F(y);\ \ (y_1,\dots,y_{n-1})\in K,\ y_n=\lambda\}$$

Množina

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

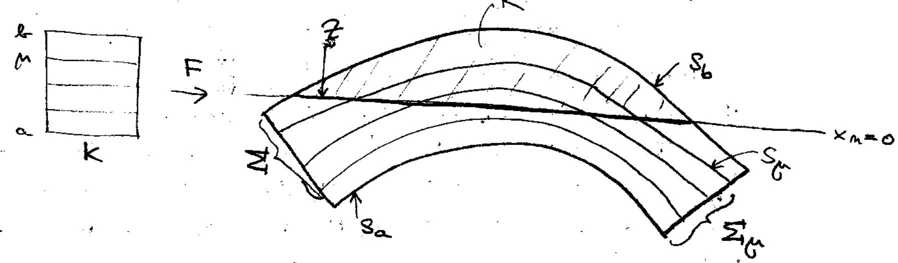
zvaná <u>nosič</u> pole je pak otevřená a transformace F má reálnou analytickou inverzi.

Zavedeme množiny

$$R = \{x\in\Sigma;\ x_n \geq 0\},$$

$$Z = \{x\in\Sigma;\ x_n = 0\},$$

$$\Sigma_\mu = \{x\in S_\lambda;\ a<\lambda\leq\mu\}.$$



Předpokládáme, že $\Sigma_\mu \cap R$ je $\forall\mu\in\Lambda$ uzavřená podmnožina množiny Σ.

<u>Věta o jednoznačnosti</u> Uvažujme lineární systém m-tého řádu

(*) $$Lu = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x)\, D^\alpha u = 0,$$

kde $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^N$ a matice koeficientů $A_\alpha(x)$ jsou reálné analytické v Σ. Nechť Z a S_λ nejsou charakteristické vzhledem k operátoru L a nechť $u\in C^m(R)$ je řešením rce (*) s nulovými Cauchyovými daty na Z (tj. $\underline{u}$ je třídy C^m uvnitř R, $D^\alpha u$, $|\alpha|\leq m$, lze spojitě rozšířit na celé R a rozšířené hodnoty splňují $D^\alpha u=0$ na Z pro $|\alpha|\leq m-1$). Pak $u=0$ v R.

<u>Pozn.</u> Z uvedené věty lze získat aplikací analytických deformací věty pro křivé počáteční plochy Z.

Cauchyova úloha pro rovnici struny

Lemma 1 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je konvexní oblast a nechť $u \in C^2(\Omega)$ splňuje v Ω rovnici*

$$u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0\,, \qquad a = const > 0\,. \tag{1}$$

Pak existují funkce P, Q třídy C^2 takové, že

$$u(x,t) = P(x - a\,t) + Q(x + a\,t) \qquad \forall\ (x,t) \in \Omega\,.$$

Důkaz. Viz cvičení. □

Poznámka 1 Rovnice (1) se nazývá rovnice struny nebo též jednorozměrná vlnová rovnice.

Poznámka 2 Pro nekonvexní oblasti Ω lemma 1 neplatí. Nechť $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Řešení u z lemmatu 1 lze psát ve tvaru

Poznámka 3 $u = u_1 + u_2$, kde $u_1(x,t) = P(x - a\,t)$ a $u_2(x,t) = Q(x + a\,t)$. Snadno lze ověřit, že funkce u_1 a u_2 jsou řešeními rovnice (1). Funkce $P = P(x)$ představuje graf funkce u_1 v čase $t = 0$. V čase $t = 1$ je funkce u_1 rovna funkci P posunuté o vzdálenost a vpravo. V čase $t = 2$ je funkce u_1 rovna funkci P posunuté o vzdálenost $2\,a$ vpravo atd. Tedy funkce u_1 představuje vlnu šířící se rychlostí a v kladném směru osy x. Podobně funkce u_2 představuje vlnu šířící se rychlostí a v záporném směru osy x. Řešení jednorozměrné vlnové rovnice si lze tedy představit jako superpozici dvou vln šířících se v kladném a záporném směru osy x rychlostí a. Funkce u_1 a u_2 se nazývají *vlnová řešení* rovnice (1).

Věta 1 *Cauchyova úloha*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2\, u_{xx} = f \quad \text{v} \quad \mathbb{R}^2\,,\\ &u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad u_t(x,0) = \psi(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ a $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ má jednoznačné řešení $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a platí

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\,[\varphi(x - a\,t) + \varphi(x + a\,t)] &+ \frac{1}{2\,a} \int_{x-a\,t}^{x+a\,t} \psi(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2\,a} \int_0^t \int_{x-a\,(t-\tau)}^{x+a\,(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Jsou-li funkce φ, ψ a f liché vzhledem k bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, pak též řešení u je liché vzhledem k bodu x_0 a speciálně $u(x_0,t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
Jsou-li funkce φ, ψ a f sudé vzhledem k bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, pak též řešení u je sudé vzhledem k bodu x_0 a speciálně $u_x(x_0,t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Viz cvičení. □

Poznámka 4 Hodnota řešení u Cauchyovy úlohy z věty 1 v bodě (x,t) závisí pouze na $\varphi(x-a\,t)$, $\varphi(x+a\,t)$, $\psi|_{[x-a\,t,x+a\,t]}$ a hodnotách pravé strany f v trojúhelníku s vrcholy (x,t), $(x-a\,t,0)$ a $(x+a\,t,0)$. Pro daný bod $x_0\in\mathbb{R}$ ovlivňuje hodnota $\varphi(x_0)$ řešení u pouze podél charakteristik $x-a\,t=x_0$ a $x+a\,t=x_0$. Hodnota $\psi(x_0)$ ovlivňuje řešení u pouze v bodech množiny $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,;\; x_0-a\,t\le x\le x_0+a\,t\}$.

Věta 2 *Nechť u je řešení Cauchyovy úlohy z věty 1 pro data φ, ψ, f a nechť $\widetilde{u}$ je řešení této Cauchyovy úlohy pro data $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{f}$. Nechť $\varphi,\widetilde{\varphi}\in C^2(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\psi,\widetilde{\psi}\in C^1(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ a $f,\widetilde{f}\in C^1(\mathbb{R}^2)\cap L^1(\mathbb{R}^2)$. Pak*

$$\|u-\widetilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\le\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+\frac{1}{2\,a}\,\|\psi-\widetilde{\psi}\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{1}{2\,a}\,\|f-\widetilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{3}$$

Důkaz. Tvrzení plyne snadno ze vztahu (2). □

Věta 2 ukazuje, že malým změnám dat odpovídají malé změny řešení uvažované Cauchyovy úlohy. Cauchyova úloha je tedy korektní podle Hadamarda (řešení existuje, je určeno jednoznačně a je stabilní).

Uvažujme méně hladká data než doposud, např. $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$, $\psi\in L^1(\mathbb{R})$ a $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$. Pak existují posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty\subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ takové, že pro $n\to\infty$

$$\|\varphi-\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\to 0\,,\qquad \|\psi-\psi_n\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0\,,\qquad \|f-f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\to 0\,.$$

Ke každé trojici φ_n, ψ_n, f_n existuje řešení $u_n\in C^2(\mathbb{R}^2)$ příslušné Cauchyovy úlohy. Toto řešení je dáno vztahem

$$\begin{aligned} u_n(x,t)=\frac{1}{2}\,[\varphi_n(x-a\,t)+\varphi_n(x+a\,t)]&+\frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi_n(s)\,\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{2\,a}\int_0^t\int_{x-a\,(t-\tau)}^{x+a\,(t-\tau)}f_n(\sigma,\tau)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Jelikož posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jsou cauchyovské, je podle věty 2 posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v normě prostoru $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, a má tudíž limitu $u\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Tuto limitu je rozumné považovat za zobecněné řešení uvažované Cauchyovy úlohy s nehladkými daty. Provedením limitního přechodu ve vztahu (4) zjišťujeme, že i zobecněná řešení jsou dána vzorcem (2). Nerovnost (3) zůstává v platnosti i pro zobecněná řešení a ukazuje, že aproximujeme-li nehladká data velmi přesně daty hladkými, pak zobecněné řešení se jen nepatrně liší od řešení odpovídajícího hladkým datům. Stabilita problému nám tedy umožňuje zavést a rozumným způsobem interpretovat zobecněná řešení.