6 Odvození fundamentálního řešení rovnice vedení tepla (RVT)

Poslední změna: 23.11.2023 23:07:13

Budeme hledat speciální řešení $u : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rovnice

$$\partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0,$$

pro $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Operátor Δ uvažujeme pouze vzhledem k proměnné x.

1. Ukažte, že operátor Δ je rotačně invariantní, tj. pro libovolnou ortonormální matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ platí $(\Delta w)(Ax) = \Delta(w(Ax))$.

   Závěr: Speciální řešení RVT budeme hledat ve tvaru $u(t, x) = v(t, |x|)$.

2. Ukažte, že pokud $v(t, |x|)$ řeší RVT v $Q \subset (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, pak $v(\lambda^2 t, \lambda|x|)$ řeší RVT na $Q_\lambda = \{(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n; (\lambda^2 t, \lambda x) \in Q\}$.

3. Ukažte, že pokud pro jisté $\alpha > 0$ a pro všechna $t > 0$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ platí $(\lambda^2 t)^\alpha w(\lambda^2 t, \lambda|x|) = t^\alpha w(t, |x|)$, tak funkce w musí mít tvar $w(t, |x|) = t^{-\alpha/2} v(|x|/\sqrt{t})$ pro jistou funkci $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

   Závěr: Řešení RVT hledáme ve tvaru

   $$u(t, x) = t^{-\alpha} v(|x|^2/t) \tag{6.1}$$

   pro vhodnou funkci $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Najděte obecné řešení RVT ve tvaru (6.1) na $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Postupujte následovně

   (a) Dosaďte (6.1) do RVT a upravte tak, aby výsledná rovnice závisela pouze na $|x|^2/t$.

   (b) Nahraďte $|x|^2/t$ novou proměnnou s a vzniklou rovnici vynásobte integračním faktorem s^β. Zvolte α a β tak, aby se vzniklá rovnice dala napsat jako rovnost derivací.

   (c) Integrujte a napište obecné řešení v.

5. Volte parametry tak, aby $v(0+) \in (0, +\infty)$ a

   $$\int_{\mathbb{R}^n} u(1/4, x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

6. Buď $n > 2$. Ukažte, že funkce $h(x) = \int_0^{+\infty} u(t, x)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ řeší rovnici $\Delta h = 0$ v $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a najděte vyjádření funkce h, které neobsahuje integrál.